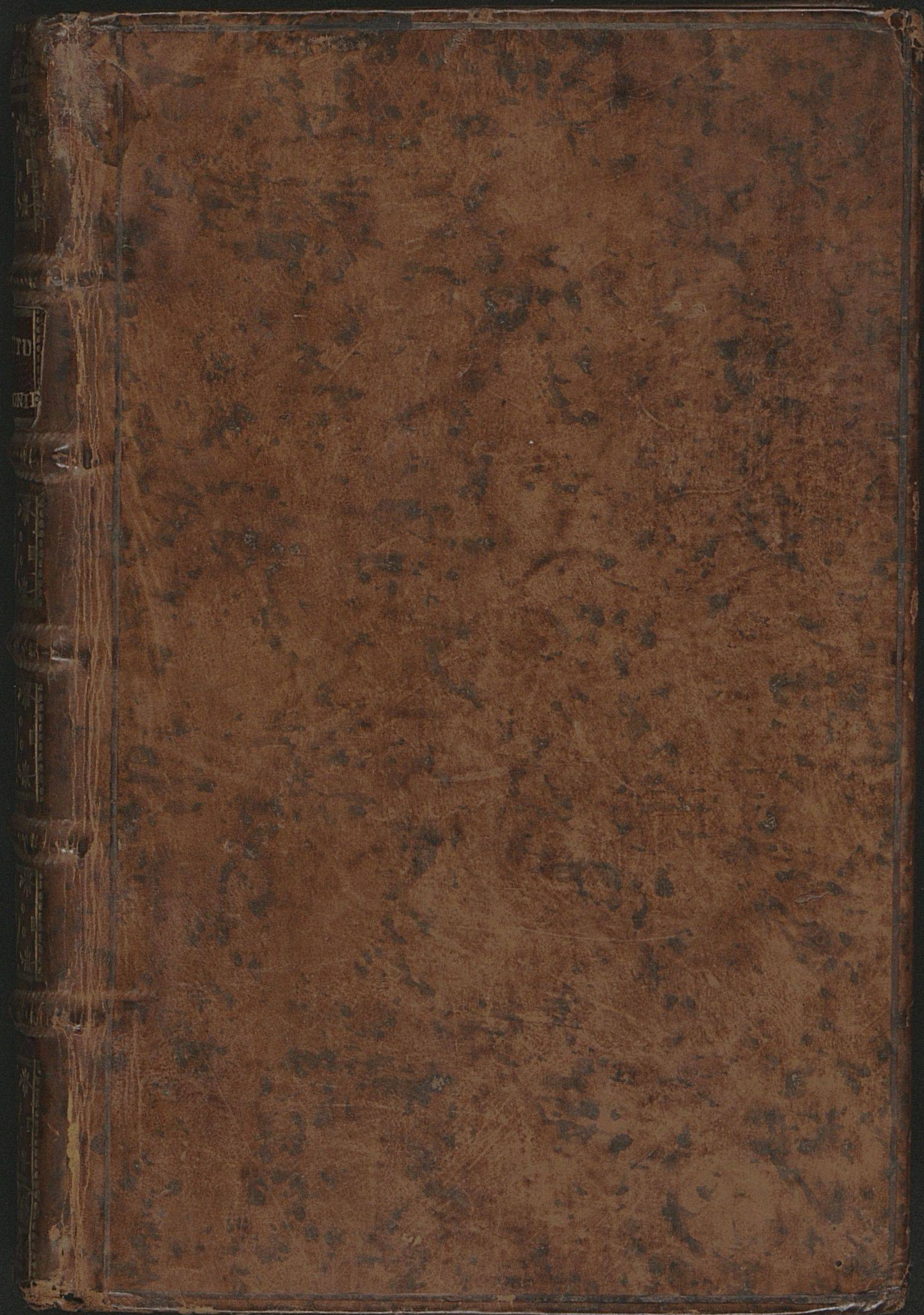






INSTITUTIONS
NEWTONIENNES.

Par M. SIGORGNE, de la Maiſon & Société de Sorbonne, Archidiacre, Chanoine de l'Egliſe de Mâcon, & de la Société Royale des Sciences & Belles-Lettres de Nancy.

SECONDE EDITION,

Revûe, corrigée & augmentée, avec figures.

Prix 7 liv. relié.



A PARIS,

Chez GUILLYN, Libraire, quai des Auguſtins, du côté du Pont S. Michel, au Lys d'or.

M. DCC. LXIX. [1769]

Avec Approbation & Privilége du Roi.



PRÉFACE.

IL eſt des points de vûe heureux qui décident ſouvent des plus ſublimes découvertes ; il en eſt de ſéduiſans qui ne peuvent ſoutenir un ſecond regard. *Deſcartes*, cet homme de génie, à qui la Philoſophie doit tant, & qui devoit ſi peu lui-même à la Philoſophie, ſaiſit avec beaucoup d'apparence l'idée ſimple & naturelle d'une barque flottant ſur l'eau, & entraînée par un courant. Il en tranſporta le méchaniſme dans le Ciel ; & cette expérience perdue pour tant de Spectateurs,

devint entre ſes mains le fondement & la baſe du magnifique édifice des tourbillons.

Cependant, quelqu'apparent que puiſſe être ce méchaniſme, il eſt aujourd'hui reconnu que ce n'eſt point là le reſſort de la Nature, ni le principe qui anime les Cieux. Les Comètes, ces aſtres auſſi anciens que le Monde, qui ſe meuvent dans tous les ſens & dans toutes les directions, ſont des témoins qui dépoſent contre ces courans. Un cylindre qui ſe mouvroit dans un fluide de même denſité que lui, ne pourroit parcourir la longueur de ſon axe, ſans déplacer autant de matière qu'il en contient, & ſans perdre par conſéquent la moitié de ſon mouvement. Une ſphère de même diamètre &

de même denſité, déplaceroit dans ce milieu autant de matière qu'elle en renferme, en parcourant de même un eſpace égal à ſon diamètre; mais rencontrant obliquement le fluide, elle n'éprouveroit que la moitié de la réſiſtance du cylindre, & à cet égard parcourroit deux fois la longueur de ſon axe, avant que de perdre la moitié de ſa vîteſſe. Cela ſeroit effectivement ainſi, ſi la ſphère, ſous même vîteſſe, avoit autant de mouvement que le cylindre: mais elle n'en a que les $\frac{2}{3}$; & ſi la réſiſtance étoit la même, elle perdroit par cette raiſon la moitié de ſa vîteſſe, en parcourant les $\frac{2}{3}$ de ſon axe: donc en composant ces raiſons, elle doit perdre la moitié de ſon mouvement, en parcourant $\frac{4}{3}$ de ſon dia-

mètre. Comment donc les Comètes pourroient elles pourſuivre leur route, ſi elles avoient à diviſer un tel fluide, ou à lutter contre de tels courans ? Non-ſeulement il y en a pluſieurs de rétrogrades ; mais elles ſe meuvent toutes plus vîte que les planètes, dans la région deſquelles elles ſe trouvent.

Les planètes même ſuffiſent pour en renverſer la ſuppoſition. Elles ne ſont pas dans un même plan, mais ſe meuvent dans des plans différens qui s'entrecoupent ſous de très-grands angles au centre du ſoleil. Les couches du tourbillon ſeroient-elles donc auſſi dans des plans différens ? Et comment le mouvement pourroit-il ſubſiſter dans un pareil tourbillon ? Quelle pourroit être la cauſe

première & ſubſiſtante de cette divarication des plans ? Si on ſuppoſe, au contraire, toutes les couches dans un même plan, comment attribuer au mouvement de ces couches l'entraînement des planètes qui ſe mouvroient dans des ſens différens ? Comment le tourbillon ne ſeroit-il pas un obſtacle, au lieu d'être un déférent ?

Si le tourbillon étoit ſphérique, on n'y verroit rien qui pût aſſujettir les aſtres à décrire des ellipſes. Le tourbillon ne pourroit que nuire à cet effet, en altérant néceſſairement la vîteſſe & la direction des planètes qui auroient commencé à ſuivre un mouvement elliptique. Ayant à vaincre la peſanteur & la réſiſtance du fluide en remontant à l'*aphélie*; ſe

mouvant au contraire par l'excès de leur peſanteur ſur la réſiſtance du fluide, en deſcendant au périhélie, elles n'auroient ni la même vîteſſe, ni la même peſanteur effective à même hauteur des deux côtés de leur courbe, & ne pourroient par conſéquent décrire, même une fois, deux branches ſemblables d'une même courbe. Placées à leur aphélie, le tourbillon eût eu trop de vîteſſe pour leur imprimer le mouvement néceſſaire à la deſcription d'une ellipſe; placées au périhélie, ce tourbillon en eût eu trop peu; & à la moyenne diſtance, ſon cours n'eût pas eu la direction néceſſaire pour imprimer aux planètes le mouvement dans une ellipſe (*a*).

(*a*) En ſuppoſant qu'on pût aſſigner une cauſe

Si le tourbillon eſt elliptique, il faudra que toute la matière du grand diamètre paſſe en même tems par le petit ; qu'il ſe faſſe, par le rétreciſſement du canal, un frottement conſidérable ; que le ſoleil ſoit chaſſé du foyer au centre ; que le mouvement ſe détruiſe, ou que le tourbillon s'arrondiſſe. Dans un fleuve qui rétrecit ſon lit, il paſſe en même tems dans le lieu le plus étroit la même quantité d'eau que dans l'endroit le plus large, & la vîteſſe s'augmente au lieu de diminuer ; mais de

aux oſcillations verticales admiſes par M. *Jean Bernoulli*, dans ſa Piéce de 1730, il faudroit qu'elles puſſent être perſévérantes, ce qui eſt difficile à croire ; & alors même la planète ſe trouvant comme repouſſée au périhélie, ſa courbe ſeroit convexe vers le ſoleil, comme on le verra dans la ſeconde Partie du n° 4.

nouvelle eau arrive qui précipite la première, le lit de l'eau se hausse, les couches inférieures sont plus pressées que les supérieures, & il en résulte une augmentation de vîtesse. Ici, point de nouvelle source de mouvement, point d'exhaussement en profondeur, point de cause d'accélération. Le fluide est donc laissé à toute la résistance du frottement, & il en résulte une perte, une diminution continuelle de vîtesse. Si le mouvement s'étoit augmenté au *périhélie*, pourquoi se rallentiroit-il en allant vers l'*aphélie*, où le canal est plus large, & le mouvement plus libre ?

Comment toutes les ovales d'un pareil tourbillon auroient-elles, comme les planètes, différentes excentri-

cités ? Comment Mercure, qui est la plus inférieure de toutes, qui a le plus d'excentricité & de divarication du plan de l'écliptique, auroit-il le plus souffert de l'action d'une force qui auroit agi à la surface du tourbillon, pour en déranger les couches en le comprimant ? Comment même toutes les planètes ne seroient-elles pas releguées à la surface du tourbillon par la réaction continuelle du fluide dont elles rétrecissent le lit, de la même manière que les Cartésiens, pour expliquer les marées, attribuent le déplacement continuel de la terre à cette réaction ?

Il n'y a sans doute point de tourbillons. Si une sphère tourne rapidement sur son centre, au milieu d'une matière subtile, déliée, en

repos, sa surface faisant une impression continuelle sur la première couche qui lui est contiguë, l'entraînera peu à peu dans son mouvement. Celle-ci entraînera la seconde ; & l'impression se communiquant consécutivement, on aura un tourbillon. Mais il est évident que l'impression de la couche inférieure continue de se faire sur la couche supérieure contiguë, tant que chaque point inférieur sera obligé de se séparer du point supérieur qui lui répond, & par conséquent jusqu'à ce que toutes les couches aillent ensemble d'une même vîtesse angulaire. Le tourbillon ne pourra donc être dans un état permanent, à moins que ses différentes couches ne se meuvent toutes d'une pièce, & que les tems pério-

diques ne ſoient égaux dans toute la profondeur du tourbillon. Il eſt vrai que ſi un tourbillon eſt environné d'autres tourbillons, ſa ſuperficie extérieure pourra être retardée par le frottement & l'action de ces tourbillons environnans ; que celle-ci retardera par la même cauſe la vîteſſe de la couche inférieure qui la touche, & ainſi de proche en proche juſqu'au centre ; ce qui empêche les couches de ſe mouvoir d'un même mouvement angulaire ; mais les Loix de Képler n'en ſeront pas mieux obſervées : car il faudra alors, pour que chaque couche déterminée ſoit dans un état permanent, que l'impreſſion ſur ſa partie convèxe ſoit égale à celle qui ſe fera ſur ſa partie concave. Or, quel ſeroit le

principe qui pourroit réaliser cette supposition, laquelle ne donneroit pas encore l'effet que l'on cherche, & que l'on en attend.

En effet, l'impression de deux couches sur une intermédiaire contiguë, est comme le nombre des points qui les composent, & comme la vîtesse avec laquelle elles se séparent de cette couche intermédiaire contiguë, & par conséquent en raison composée de l'étendue des couches & de leurs vîtesses angulaires. Il faudroit donc, pour que les impressions fussent égales, que les vîtesses angulaires fussent en raison inverse des couches, ou des quarrés de leurs distances au soleil; d'où il suivroit que les tems périodiques qui sont en raison renversée des vîtesses angu-

laires, ſeroient en raiſon directe des quarrés des diſtances, au lieu d'être en raiſon des racines quarrées des cubes de ces diſtances, comme le veut la troiſième Loi de *Kepler*.

M. Jean *Bernoulli*, dans ſa Pièce de 1730, a fait les plus grands efforts pour affoiblir la force de ce raiſonnement. Il prétend que Newton n'y a point fait attention à la quantité de preſſion dont chaque couche eſt pouſſée contre ſa voiſine contiguë; qu'il a négligé l'action du levier, & qu'il a mal-à-propos ſuppoſé le frottement en raiſon des ſurfaces; qu'en rectifiant ces erreurs, il auroit eu d'autres réſultats, & que ſa démonſtration n'eſt ainſi qu'un paralogiſme.

Mais, 1°. il eſt évident que M.

Newton a eu raiſon de négliger la quantité de preſſion, par la raiſon toute ſimple que cette quantité doit être égale dans chacune des deux couches qui agiſſent ſur l'intermédiaire contiguë; autrement, le tourbillon voiſin *A*, dont vient la preſſion de la couche ſupérieure, ne balanceroit pas le tourbillon *B*, dont nous conſidérons les couches, mais l'enfonceroit ou en ſeroit enfoncé, juſqu'à ce qu'il y eût de part & d'autre égalité de preſſion.

2°. Il n'eſt pas moins évident que Newton a dû avoir égard à l'étendue des ſurfaces. La régle de M. *Amontons* qu'on oppoſe, n'eſt ni toujours vraie, ni applicable dans le cas préſent; ce qui fait que dans les cas ordinaires le frottement eſt à-peu-

près le tiers du poids, quelles que ſoient les ſurfaces, c'eſt que plus la ſurface eſt grande, plus il y a à la vérité de reſſorts à plier; mais moins il faut les plier chacun en particulir ſous le même poids, de manière qu'ils ne réſiſtent pas en raiſon de leur nombre, mais en raiſon du poids dont ils ſont chargés. Mais ſi ce ne ſont pas des reſſorts à plier; ſi ce ſont des parties engraînées à rompre, il eſt évident que plus il y aura de ces parties ſous un même engraînement, qui dépend alors de la profondeur des pores, plus il y aura de réſiſtance, laquelle ſera néceſſairement comme la ſurface: c'eſt le cas d'une couche de tourbillon. Les points qui la compoſent, étant ſéparés, faiſant chacun comme autant

de poids à part, & exerçant dans une même couche une égale pression, le frottement est comme leur nombre, & par conséquent comme l'étendue des couches, ou comme les quarrés des distances. C'est aussi là la raison pour laquelle on ne doit pas avoir égard à la propriété du levier, qui n'a lieu que sur une circonférence solide, & nullement sur une couche fluide, dont chaque point est à mouvoir sans nulle considération de la distance où il est du centre.

3°. Mais en évaluant même ce que M. *Bernoulli* se plaint que *Newton* n'a point considéré, il s'en faut bien que le résultat soit conforme aux observations : car, au lieu de la vîtesse $v = x^{-\frac{1}{2}}$ & du tems $t = x^{\frac{3}{2}}$ qu'exigent les Loix de *Képler*, il

trouve $u = x^{-\frac{2}{3}}$ & $t = x^{\frac{5}{3}}$, quantités bien différentes de celles que prefcrivent ces Loix ; de manière que ce n'eft qu'à l'aide de fuppofitions forcées qu'il ramène les chofes en l'état où elles doivent être ; encore tout va-t-il d'une égale vîteffe angulaire , malgré ces fuppofitions , fi l'on employe une partie de conftante que M. *Bernoulli* a négligée (*a*).

Mais ce n'eft point ici le lieu d'entrer dans cette difcuffion. M. Bernoulli lui-même a abandonné fon fyftême dans fa Piéce de 1734 ; & il nous fuffit de remarquer qu'il convient ici » que chaque couche de » fluide entre deux autres voifines, » pour n'être pas forcée de fe mou-

(*a*) V. M. d'Alembert, Traité des fluides, pag. 385.

» voir avec le reste d'une égale vî-
» tesse angulaire ; & pour qu'elle
» puisse circuler avec une vîtesse uni-
» forme, doit recevoir autant d'ef-
» ficace par le frottement de la cou-
» che inférieure, pour en être accé-
» lérée, qu'elle en reçoit en sens
» contraire par le frottement de la
» supérieure, pour en être retardée ;
» de manière que les décroissemens
» de vîtesse étant à tous momens
» réparés par des accroissemens égaux,
» la couche conserve sa circulation
» uniforme ». Or si les couches inférieures réparent ainsi les pertes des couches supérieures, qui réparera ce qu'elles y employent, & ce qu'elles y perdent de force ? Le tourbillon sera donc forcé de se rallentir rapidement vers le centre, & bientôt toute la circulation cessera.

Enfin M. *Newton* a démontré que la proportionnalité des aires aux tems qu'obſervent les planètes, ſelon la première Loi de *Képler*, exige dans chacune d'elles que la vîteſſe aux extrémités des apſides ſoit en raiſon inverſe de leurs diſtances au ſoleil ; telle ſeroit par conſéquent la vîteſſe des courans qui les emporteroient. Or la ſeconde Loi de Képler exige que les vîteſſes moyennes des différentes planètes ſoient en raiſon renverſée des racines de leurs diſtances au ſoleil ; & tel ſeroit pour cette raiſon le rapport des vîteſſes des courans qui les emporteroient. Il faudroit donc que dans le même tourbillon les vîteſſes de ſes couches fuſſent à la fois en raiſon renverſée, &

de leurs ſimples diſtances au ſoleil, & des racines quarrées de ces diſtances; ce qui eſt une contradiction.

M. *de Leibnitz* a ſenti la difficulté. Il a imaginé, pour y répondre, une interruption de vîteſſe dans le tourbillon. Selon lui, dans toute la profondeur de l'orbe de chaque planète, la vîteſſe des différentes couches eſt en raiſon inverſe de leurs diſtances au centre; tandis que le rapport des vîteſſes de ces couches aux vîteſſes des couches compriſes dans toute l'étendue de l'orbe d'une autre planète, eſt celui de l'inverſe des racines des diſtances. Mais outre l'impoſſibilité méchanique d'une telle conſtruction, il en réſulteroit une force centrifuge, & par conſéquent une peſanteur pour

chaque planète, en raison inverse des cubes des différentes distances, au lieu du rapport des quarrés, que M. Leibnitz avoue lui même nécessaire pour décrire une ellipse.

Aussi les Cartésiens ont-ils pris aujourd'hui le parti de n'employer le tourbillon, que pour en déduire la pesanteur, & d'avouer qu'il ne fait aucune impression sur la circulation des planètes, qui leur vient d'ailleurs. Mais outre qu'il est démontré que la pesanteur alors ne tendroit point vers le centre, mais seroit dirigée perpendiculairement à l'axe, il est évident que si la force centrifuge du tourbillon avoit assez de prise sur les astres pour les précipiter, la vîtesse circulaire dont elle provient, feroit à plus forte raison des impressions

considérables sur ces mêmes astres pour en altérer le cours. Il est donc démontié en mille manières que le tourbillon ne seroit bon qu'à troubler le ciel, & que le fait très-séduisant dont M. Descartes est parti, mène à des résultats désavoués par la Nature & par la Géométrie.

Newton, cet autre Descartes qui, avec beaucoup de profondeur naturelle, avoit mis à profit les lumières & les fautes même de son prédécesseur, partit d'un fait différent; & ce fait qu'il saisit se trouva heureusement dans son développement le fait général de la Nature, & le fil de ses opérations.

Le jet des bombes, cette spéculation qui jusqu'à lui n'avoit eu pour terme & pour objet que la destruc-

tion des Villes & le malheur des hommes, fut entre ſes mains un principe fécond de vérités & de découvertes. Il ne vit là ni matière ſubtile, ni matière mue en paraboles de toutes les hauteurs, de toutes les amplitudes, & dans toutes les directions. Il y vit la combinaiſon unique de deux forces antagoniſtes ; l'une imprimée une fois & perſévérant toujours ; l'autre ſe renouvellant ſans ceſſe, détournant à chaque pas le mobile de ſa direction actuelle, courbant ſon mouvement tangentiel par un principe perſévérant de gravitation.

Or, ſi ce ne ſont point des tourbillons paraboliques qui entraînent les corps que nous projettons ; ſi la courbe qu'ils décrivent n'a pour

cauſe & pour principe qu'une force imprimée une fois, & une continuelle gravitation, pourquoi recourir à d'autres reſſorts pour mouvoir & entraîner les aſtres? Pourquoi mouvoir un océan de matière pour entraîner cinq ou ſix corps, qui ne ſont qu'un point pat rapport à lui, & un atome plus petit, que n'eſt par rapport à la voûte céleſte leur diamètre apparent? Tel fut le premier raiſonnement de *Newton*. Il vit entre ſon ſyſtême (c'en étoit un juſques-là), & celui des tourbillons, la même différence qui ſe trouve entre la féconde ſimplicité du ciel de *Copernic*, & la complication énorme, par-là même ſtérile, du ciel de *Ticho* & de *Ptolomée*, où tout ne va qu'à force de machines, & qu'à l'aide

d'une dépenſe immenſe de mouvemens & d'*épicycles*.

Pour s'aſſurer que c'étoit là la marche de la nature, Newton rechercha quelle loi de peſanteur ſeroit néceſſaire pour décrire une ellipſe, comme font les planètes; & il trouva par la Géométrie que cette courbe ne peut être décrite autour d'un corps placé au foyer, à moins que la peſanteur ne varie dans la raiſon réciproque du quarré de la diſtance: condition poſſible, naturelle même & prouvée par l'analogie de la lumière & de toutes les qualités qui ſe répandent en rond. Il vit même par le même calcul, que les Loix de Képler réſultoient néceſſairement d'une telle loi de peſanteur, & que la parabole que décrivent à nos diſtances

les corps projettés, se convertiroit immédiatement en ellipse, s'ils étoient tirés d'une hauteur qui pût rendre sensible l'inégalité des actions de la pesanteur, ou s'ils étoient lancés avec une force qui leur donnât assez d'amplitude pour ne pas rencontrer la terre dans leurs directions.

Ce n'étoient-là cependant encore que des préjugés légitimes, & que de fortes présomptions. Il falloit des faits à M. Newton, qui avoit pris le parti de se refuser à toute hypothèse, & la lune les lui fournit. Si les planètes tournent autour du soleil, parce qu'elles sont assujetties à une force centrale, diminuant comme le quarré de la distance augmente, il faut, par parité de raisons, que la lune soit retenue dans son orbe

par une ſemblable peſanteur dirigée vers la terre, & ſeulement différente de la peſanteur des corps terreſtres à nos diſtances, en raiſon de la diminution qu'elle doit ſouffrir par l'augmentation du quarré de la diſtance de la lune. Or on connoît la vîteſſe des corps peſans; on connoît la diſtance de la lune, l'arc qu'elle décrit dans une minute; & par conſéquent le ſinus verſe de cet axe, ou, ce qui eſt le même, la peſanteur de la lune exprimée par ce ſinus. Qu'on calcule donc ſur ce pied, & l'on trouvera les choſes dans le rapport qui juſques-là n'avoit été que ſoupçonné.

La lune eſt éloignée de la terre de ſoixante demi-diamètres de cette planète principale. La circonférence de l'Equateur de la terre eſt, ſelon

les mesures des Mathématiciens, de 123249600 pieds de Paris; & par conséquent l'orbe de la lune, soixante fois plus grand, est de 123249600 × 60 pieds. Divisant par trois, on aura en pieds le diamètre de cette orbite.

Or la lune fait sa révolution en 39343 minutes; & divisant par ce nombre l'orbite entière de la lune, le quotient 187964 pieds, ou environ, sera l'arc que la lune parcourt dans une minute; quarrant cet arc qui peut aisément se confondre avec sa corde, & passer pour insensible, n'étant que la 40, 000e partie, ou environ, de l'orbe entier, & divisant ce quarré par le diamètre de l'orbe de la lune, le quotient 15 $\frac{1}{12}$ pieds, qui en provient, exprime

(sect. con. n°. 71.) le sinus verse de cet arc, ou la pesanteur de la lune; & ce qui est le même, la pesanteur dont cette force feroit descendre cet astre dans l'espace d'une minute, si sa vîtesse de projection ne le retenoit dans son orbe.

Or les graves parcourent ici 15 $\frac{1}{12}$ pieds en une seconde, & par conséquent 15 $\frac{1}{12}$ × 3600 pieds dans une minute: donc leur pesanteur est dans le même tems donné 3600 fois plus grande que celle de la lune, & précisément dans le rapport inverse du quarré de leurs distances au centre de la terre.

Tout se vérifioit ainsi sous le calcul de *Newton*. Non-seulement la combinaison simple des mouvemens projectile & de gravitation lui don-

noit ſans frais le mouvement curviligne & elliptique des planètes; non-ſeulement la loi de gravité néceſſaire pour cela ne contenoit rien d'impoſſible ou de révoltant ; non-ſeulement elle étoit analogue à la loi que ſuivent pluſieurs agens connus dans la Nature, & néceſſaire dans tout ſyſtême, pour que le tems périodique des planètes fût conforme à la Loi de *Képler*; mais elle devint une obſervation immédiate par une expérience priſe en quelque ſorte ſur le globe même de la Lune. Le ſyſtême de Copernic ſi vrai, ſi démontré pour quiconque a une teinture d'aſtronomie, a-t-il rien de plus ſimple ou de plus frappant? Eſt-il appuyé ſur plus de faits ou ſur des faits plus immédiats?

Cependant si la terre pese sur le soleil, il est nécessaire que la lune gravite aussi vers lui, en même tems qu'elle gravite sur la terre. N'y a-t-il donc pas lieu de craindre que les phénomènes de son mouvement autour de nous n'en soient troublés ? Tout au contraire : c'est cette double pesanteur qui donne à *Newton*, sans systême & sans hypothèse, le dénouement & l'explication précise de tous les mouvemens de la lune. Cette planète est la moins régulière de toutes, échappe souvent aux tables les plus exactes, & fait de tels écarts, qu'elle n'avoit pu encore être domptée par aucun Astronome. Elle l'est enfin par les principes de M. *Newton*. Toutes les bizarreries de son cours y deviennent d'une nécessité

qui les fait prédire, & les plus ſûres obſervations ſemblent n'être que des calculs faits d'après le Livre des *Principes Mathématiques.*

Il ne s'agit point ici d'à-peu-près, ni d'explications vagues, comme ſont les explications Cartéſiennes les plus ſatisfaiſantes. Il ne s'agit que de ce qui eſt, de la quantité préciſe & de l'équation même du mouvement de la lune. Tout cela eſt analiſé, réglé pour toujours par la philoſophie immortelle de M. *Newton*. Si quelques Géomètres avoient cru trouver cette théorie en défaut ſur la quantité du mouvement de l'apogée, cette erreur, qui fait la gloire de Newton, a fait auſſi la leur, par celle qu'il y a à reconnoître ſoi-même le défaut ou le vice d'application de ſon calcul.

C'eſt par le même principe que Newton explique la préceſſion de l'équinoxe. Il calcule quelle en doit être la quantité ; il fait voir qu'elle eſt ſujette à quelques inégalités, & que ſon mouvement doit être de 50″ par an ; ce qui dans ſes deux points s'accorde avec l'obſervation. Ce n'eſt point ſeulement ici l'étonnante conformité du calcul avec le phénomène qui doit ſurprendre ; c'eſt encore le principe néceſſaire qui y entre, & que des expériences poſtérieures ont vérifié. Si la terre étoit ſphérique, il n'y auroit point de mouvement dans l'équinoxe. Si elle étoit un ſphéroïde allongé par les poles, les points équinoxiaux avanceroient ſelon l'ordre des ſignes, & les équinoxes ſeroient retardés. Il

faut, pour que le phénomène obſervé ait lieu, que la terre ſoit un ſphéroïde applati. Donc, puiſqu'il eſt aujourd'hui certain par les meſures, qu'elle a cette dernière figure, il eſt néceſſaire de conclure que *Newton* a ſaiſi le rapport de la nature, & le fil qui conduit à la vérité. *Intima panduntur victi penetralia cœli*, s'écrioit à cette occaſion M. Hallei. Saiſis du même étonnement que lui, lui ferons-nous un crime de ſon enthouſiaſme ?

Il ſuivoit du même principe de la gravitation univerſelle, que les eaux de la mer devoient s'élever & s'amonceler ſous la lune ; & cela pouvoit être une difficulté pour ceux qui étoient accoutumés à prétendre par ſyſtême, qu'elles s'y abaiſſent.

Mais des obſervations certaines & poſtérieures ayant juſtifié l'élévation, la difficulté s'eſt convertie en preuve, comme toutes celles qu'on a faites contre M. Newton: *In aperto enim ac libero Oceano*, dit M. Euler, *aquam mox poſt tranſitum lunæ poſt meridianum elevari obſervamus, cùm ſecundùm Carteſii ſententiam deprimi deberet.* C'eſt auſſi ce qu'on peut voir dans la Géographie de Varenius, & ce fait eſt aujourd'hui inconteſtable.

Enfin c'eſt un principe dans cette philoſophie, que les corps s'attirent en raiſon directe de leurs maſſes, & en raiſon inverſe du quarré de leurs diſtances. C'eſt donc auſſi un principe que les planètes s'attirent en même tems qu'elles ſont attirées par

le ſoleil ; & l'on n'a pas manqué d'en conclure que l'ellipticité des planètes autour de cet aſtre, devroit en être dérangée. Mais il réſulte delà, au contraire, une nouvelle confirmation, & une confirmation évidente du principe. Si la philoſophie de Newton eſt vraie, elle donne un moyen sûr pour connoître la maſſe des planètes, & pour voir en conſéquence la quantité dont elles doivent ſe déranger. Or, en faiſant ce calcul, on trouve que *Mars*, *la Terre*, *Vénus & Mercure*, s'attirent ſi peu en comparaiſon de ce que ces planètes ſont attirées par le ſoleil ; que leur dérangement doit être tout-à-fait imperceptible dans un grand nombre de révolutions.

Il n'en eſt pas de même de Saturne

& de Jupiter. La maſſe de celui-ci eſt ſi grande, que le calcul démontre qu'elle doit opérer des effets ſenſibles ſur le mouvement de Saturne dans le tems de leur conjonction. *Newton* en avertit les Aſtronomes *Flamſteed* & *Hallei*. Mais le premier n'eut aucune foi à la prédiction : cependant le tems de la conjonction de ces deux planètes arriva ; on fit pour la première fois cette obſervation ſingulière, & le calcul fut vérifié. Cela valut à la Philoſophie Newtonienne le ſuffrage d'un auſſi grand Aſtronome que *Flamſteed*. Eût-il été poſſible qu'il ne ſe fût point rendu?

Si Jupiter agit ſi fortement ſur Saturne, il doit agir auſſi ſur les planètes inférieures ; mais ſon action eſt ſi petite, à cauſe de ſa grande diſtance,

qu'il faut que ses effets s'accumulent long-tems pour être sensibles. Ils le deviennent enfin, & cela même a son utilité. C'est ce qui produit la lente progression des aphélies, qui ne pourroit avoir lieu, si la gravitation n'étoit réciproque & universelle.

Nous ne craignons point de dire, après cet exposé, que cette théorie est aussi prouvée par les effets que la pesanteur de l'air, & qu'il faut renoncer à tout moyen de connoissances en Physique, si on se refuse au nombre & à la nature de ces preuves. Comment sçaurons-nous que les pierres pesent en Amérique & sur les terres australes, si nous ne déférons à l'analogie & à l'induction?

Que sera-ce cependant que cette gravitation universelle, que cette ré

ciproque attraction ? Ce ſera ce que l'on voudra ; l'aſtronomie de *Newton* n'y eſt point intéreſſée. Ce ſera, ſi l'on veut, un fait dont nous ignorons la cauſe, mais qui n'en ſera pas moins un fait général & réel, qui ſera cauſe d'une multitude de faits ſubordonnés, dont il fournit l'explication. *Galilée* connoiſſoit-il la cauſe de la peſanteur, lorſqu'il en calculoit les loix, & en décrivoit les effets ? *Toricelli* ſçavoit-il pourquoi l'air eſt peſant, lorſqu'il enrichiſſoit la Phyſique, en démontrant la peſanteur de ce fluide, & en déduiſant toutes les circonſtances de l'aſcenſion de l'eau dans les pompes, & de la ſuſpenſion du mercure dans le baromètre ? On calcule en méchanique la force & l'action des poids, ſans rechercher

la cauſe de la peſanteur ; & il n'eſt pas néceſſaire de connoître la cauſe du reſſort, pour comprendre le méchaniſme, & démontrer la marche d'une pendule. Il ſuffit donc que la gravitation ſoit prouvée, pour en faire le principe de l'Aſtronomie, quelle qu'en ſoit la cauſe. Or peut-on douter de la vérité de ce fait, après les preuves que nous en avons rapportées ? S'il falloit, pour nous en convaincre, que les expériences fuſſent priſes ſur notre terre, le voyage des Académiciens au Pérou nous en fourniroit des preuves ſuffiſantes.

En effet, on ſçait que M. *Bouguer* remarqua que le plomb qui pend au fil des quarts des cercles pour les obſervations aſtronomiques,

avoit une déviation ſenſible vers la montagne *Chimboraco*, & qu'il prit toutes les précautions imaginables, en répétant l'expérience au Nord, au Sud de la montagne, pour s'aſſurer que cette déviation ne venoit d'aucune autre cauſe. *Newton* lui-même avoit, pour ainſi dire, prévu le cas, en calculant l'effet qu'auroit une montagne iſolée, dont la maſſe auroit quelque rapport avec la maſſe entière de la terre.

On ſçait de même que M. de la Condamine obſerve qu'un pendule conſtamment de même longueur, faiſoit dans 24^h, ſur le bord de la Riviere des Amazones, 98770 oſcillations, & que ſur une montagne voiſine très-élevée, il n'en faiſoit que 98720 dans le même tems; ce

qui revient à 874 & 875 ſecondes pour une oſcillation ſur la rivière & ſur la montagne. Or le pendule étant le même, les tems des oſcillations ſont en raiſon inverſe des racines, des forces ou des peſanteurs, & les peſanteurs ou les forces, en raiſon renverſée des quarrés des tems, & par conſéquent au bas & au haut de la montagne, comme $\overline{875}^2$ à $\overline{874}^2$; c'eſt-à-dire, en raiſon d'inégalité. Voilà donc, & la réciprocité de ſa peſanteur, & ſa variation, conſtatées par des faits obſervés même à nos diſtances du centre de la terre; & par conſéquent elle eſt elle-même un fait qu'il faut admettre, quelqu'obſcure & quelqu'inconnue qu'en ſoit la cauſe.

Pourquoi d'ailleurs n'aurions-nous

pas droit de regarder cette gravitation univerſelle comme une loi primordiale, parallèle à l'impulſion, dépendant, comme elle, de la volonté libre du Créateur, & ſe mêlant avec elle pour produire tous les effets de la Nature? Dans le ſyſtême des cauſes occaſionnelles, le choc n'a point de vertu, & il ne ſe fait point de communication de mouvement par le choc. Il n'eſt que le ſignal arbitraire des phénomènes que Dieu a voulu produire en augmentant le mouvement du corps choqué, & diminuant celui du corps choquant. Or, ſi le choc n'a point de vertu, s'il n'eſt pas même un inſtrument proprement dit, s'il n'eſt qu'un pur ſignal, la compréſence de deux corps dans une ſphère d'éten-

due déterminée, n'a-t-elle pas pu de même être établie comme un ſignal, & comme l'occaſion de la tendance que Dieu produiroit lui-même entre ces deux corps ? Tout n'eſt-il pas également propre pour être inſtitué cauſe occaſionnelle ? & ne ſont-ce pas les deſſeins de Dieu, & ſes deſſeins ſeuls, qui lui ont fait choiſir & déterminer ces cauſes ?

S'il a été néceſſaire, lorſqu'un corps devoit en rencontrer un autre, que Dieu ſe déterminât, ou à faire réfléchir le corps choquant, ou à échanger l'état de ces deux corps, ou à éteindre ou partager le mouvement, n'a-t-il pas de même été néceſſaire que Dieu ſe déterminât à donner ou à ne donner pas un mouvement de tendance réciproque à

des corps coexiſtans ? Si ce ſont ſes deſſeins, & les effets qu'il vouloit produire, qui ont réglé la loi du choc, pourquoi ces mêmes deſſeins n'auroient-ils pas réglé ou établi la loi de la tendance ? Y a-t-il rien de plus choquant dans cette ſuppoſition, que dans la loi du choc oblique, ſelon laquelle il ſe fait à tous momens une nouvelle augmentation de force & de mouvemens ? Car, quelques efforts que l'on ait faits dans ces derniers tems, pour donner à cette Loi les caractères de *vérité néceſſaire*, elle eſt évidemment, comme l'attraction, du nombre des *vérités contingentes*. Ne faut-il pas même une force qui raſſemble les parties de la matière, qui les uniſſe, qui en faſſe un tout, en y mettant toute l'unité

qui peut être entre des Parties distinctes ?

Dans le systême de *Leibnits*, où l'on admet la force inhérente, l'impulsion n'auroit encore aucun avantage sur l'attraction. Tout mode étant une manière d'être, & la limitation même de l'être, M. de *Leibnits* comprit que dans le choc des corps, la force ne peut passer du choquant dans le choqué; les modes, comme les attributs, sont incommunicables. Mais il continua de penser que le mouvement est toutefois l'effet d'une vraie force intrinséque aux deux corps; que dans le corps en repos, cette force est occupée, & comme engourdie avant le choc; qu'elle se déploye & se réveille au moment du choc, non par

aucune transmission d'un corps dans l'autre, mais par une causalité harmonique en vertu de l'ordre préétabli, selon lequel la force a tellement été ordonnée dans chaque particule dans son commencement, que dans ses développemens successifs tout se répond dans les différens corps, comme s'ils avoient les uns sur les autres une action physique, une véritable influence, mutuelle & réciproque.

Or il est évident que dans ce systême, s'il étoit possible de l'admettre, comme fait une secte entière de Philosophes, l'attraction même que ces Philosophes réprouvent, ne le céderoit, ni en possibilité, ni en méchanisme, à l'impulsion. Car, puisque, selon la doctrine de

Leibnits, les élémens ſont deſtitués de pores pour recevoir des impreſſions étrangères, puiſque le choc n'a aucune influence ou cauſalité phyſique, que tout dans l'origine a été diſpoſé de manière que la force de chaque corps ſe développât elle-même, & le fit de telle ſorte, que les corps ſe répondiſſent entr'eux, nous montraſſent les mêmes phénomènes, les mêmes ſymptômes, que s'ils agiſſoient effectivement les uns ſur les autres par le choc ; les partiſans de l'attraction n'auront-ils pas le même droit de dire que la force qui n'eſt, ſelon *Leibnits*, qu'une tendance & qu'un effort à changer, à modifier ſon état, a dans le principe de toutes choſes tellement été ordonnée par le Créateur, qu'elle ſe développe

elle-même par une correſpondance harmonique dans les corps différens, comme ſi, dans l'éloignement où ils ſont quant au reſte des actions dont ils ſont capables, ils avoient une influence les uns ſur les autres, & s'attiraſſent véritablement. *Voyez mes Inſtit. Leibnit. imprimées à Lyon chez Periſſe.*

Dans l'hypothèſe de l'influence phyſique même, & de l'impulſion active, au ſens des anciens Philoſophes, l'attraction ſoutiendroit le parallèle, & triompheroit de ce ridicule effort qu'on feroit pour la combattre. Car, ſi prenant alors l'attraction pour une vertu propre, inhérente dans les corps, il faudroit ſuppoſer qu'une qualité peut ſe détacher de ſon ſujet, ſe répandre dans le

vuide ou dans un eſpace qui ne réſiſte point, pour aller ſaiſir un corps dans l'éloignement, & y porter l'action d'un autre corps qui n'y eſt pas, ce qui ſans doute n'eſt pas admiſſible : il faudroit de même dans l'impulſion, ſuivant ce ſyſtême, que la force, ce mode du corps choquant, ſe détachât de la ſubſtance dont elle eſt mode, pour pénétrer le corps choqué, & ſe communiquer à toutes ſes parties, pour ſe répandre, comme l'attraction, ſinon dans le vuide, du moins dans toute l'étendue du corps choqué, & aller en ſaiſir la partie la plus éloignée du contact, pour la tranſporter avec le reſte, & lui communiquer toute ſon énergie.

En vain diroit-on dans ce ſyſtême, qu'il n'y a point effectivement de

communication de mouvement; que ce n'eſt point de cette manière que le choquant meut le choqué; mais que c'eſt par une véritable production, dont la force qu'il contient eſt la cauſe phyſique par l'entremiſe du choc; car cette force devant alors produire du mouvement dans les dernières parties du corps choqué, auſſi-bien que dans les premières, devant ſur-tout le faire au même moment dans les corps durs, tels qu'il faut bien que ſoient les premiers corpuſcules ou élémens, on auroit néceſſairement le même inconvénient que dans l'attraction, ſçavoir, une action dans la diſtance, & une force qui agit où elle n'eſt pas. Il eſt donc vrai que, quelques Principes que l'on ſuive, de quelque ſorte de Phi-

losophes que l'on soit, l'attraction marche d'un pas égal à côté de l'impulsion; qu'elle n'est point un monstre métaphysique, mais un principe de même nature que les principes les plus certains & les mieux reconnus. Si par elle on multiplie les Loix, cela n'ôte rien à la simplicité. Deux Loix emportent moins de frais & de dépense qu'une seule Loi, avec beaucoup plus d'organes, d'instrumens & de mouvemens.

N'outrons rien cependant. L'attraction existe; elle peut être un principe aussi méchanique que l'impulsion. Mais est-il solidement prouvé qu'on ne peut par aucune Loi la déduire de l'impulsion ? Pour en faire la recherche, on n'a jusqu'ici opéré que sur des fluides *continus*, qui for-

ment un plein parfait ou presque parfait, dont il n'est pas possible de reconnoître l'existence; mais n'y auroit-il rien à espérer de la considération des fluides *discrets*, dont on ne peut dans le sein du vuide même contester la réalité? Cette réflexion a conduit un Philosophe qui a conservé les vues les plus saines sur toutes les parties de la Physique, à un essai d'explication de la pesanteur universelle, dont il est impossible de rendre compte ici. *Voy. Essai de Chymie méchanique, par M. Lesage.* On peut donc s'en tenir à regarder l'attraction comme un fait, jusqu'à ce que plus d'observations ou d'expériences nous ayent mis en état de prononcer plus sûrement sur sa nature.

Tel est le résultat de ce qu'on lira dans cet Ouvrage. On l'a fait leplus

élémentaire qu'il eſt poſſible. On a tâché de lui donner une meilleure forme dans cette ſeconde édition ; & l'on y a fait des augmentations conſidérables, ſans néanmoins augmenter le volume. Le Chapitre des tuyaux capillaires eſt abſolument neuf; & l'on trouvera ſur toutes les matières des éclairciſſemens dont la première édition avoit beſoin. J'ai mis à la fin un éclairciſſement un peu plus fort ſur la force perturbatrice de la lune & la quantité de ſes effets, afin qu'on ne fût point arrêté par trop de difficultés dans le cours de l'Ouvrage ; il ne ſuppoſe cependant que la ſimple connoiſſance des Elémens de Géométrie, & il eſt tiré de Newton même. Je n'ai fait qu'en retrancher une préciſion qu'on n'attend pas dans une expoſition élémentaire.



DES SECTIONS CONIQUES.

ON appelle *Section conique*, une ligne courbe qui est la commune Section d'un plan & d'un cône coupé par ce plan. Cette courbe est différente selon la différente section du plan. Elle est nommée *Ellipse*, lorsque le plan coupant n'est point parallèle à la base du cône, & qu'il en coupe les deux côtés : *Parabole*, lorsque le plan coupant est parallèle à un des côtés du cône : *Hyperbole*, lorsque ce plan est moins incliné sur la base du cône, que le côté opposé.

C'est dans le cône qu'on a d'abord considéré ces courbes formées par ses différentes sections : mais comme l'opération est difficile, à cause de la complication du cône, & parce qu'elles n'y sont vûes que de biais, les Géomètres en ont recherché la nature & les propriétés, en les décrivant par des points trouvés sur des plans. Nous allons suivre cette méthode ; & nous ferons voir ensuite que celles qu'on décrit ainsi, sont précisément les mêmes que celles qu'on coupe dans le cône, & qui y ont pris leur origine & leur nom.

Propriétés des Sections coniques rapportées à leurs axes.

1°. On sçait que dans le cercle toutes les perpendiculaires np, np, NP, np, np, abaissées de tous les points de la circonférence sur le diamètre Aa (fig. 1.) sont moyennes proportionnelles entre les parties de ce diamètre, qu'on nomme *abscisses*; & qu'ainsi dans cette courbe *le quarré d'une de ces perpendiculaires quelconque* NP, *qu'on nomme* ordonnée, *est égal au rectangle des abscisses* formées sur le diamètre par cette ordonnée; de manière que nommant y l'ordonnée quelconque, x la petite abscisse, $2a$ le diamètre, $2a - x$ sera la grande abscisse; & l'on aura pour *l'équation du cercle*, $yy = 2ax - xx$.

Si au contraire on nomme x la distance du centre à l'ordonnée, $a - x$ sera la petite abscisse, $a + x$ la grande, & l'on aura $yy = aa - xx$; ce qui est une seconde équation au cercle, qui ne diffère de la premiere, que parce que x, y exprime une quantité différente; mais les valeurs de ces deux équations sont les mêmes.

2°. Si donc sur le diamètre Aa du cercle ADa (fig. 1.) on tire le plus d'ordonnées qu'on pourra, & qu'on les partage proportionnellement en m, m, M, m, m, B; si par ces points de division on fait passer la courbe allongée ABa, elle sera nommée *Ellipse*, & ses ordonnées mp, mp, MP, mp, BC &c, seront proportionnelles aux ordonnées correspondantes du cercle, & par conséquent leurs quarrés proportionnels aux rectangles de leurs abscisses (n° 1.) de manière qu'on aura cette pro-

portion, $MP^2 . BC^2 :: AP \times Pa . AC^2$, & $MP^2, = AP \times Pa \times \frac{BC^2}{AC^2}$. Donc si l'on fait $MP = y$, $AP = x$, $AC = a$, $BC = b$, on aura $Pa = 2a - x$, & $yy . 2ax - xx :: bb . aa$, ou $yy = \frac{2ab^2 x - bbxx}{aa} = \frac{2bbx}{a} - \frac{bbxx}{aa}$.

3°. Si l'on compte les coupées du centre, & qu'on nomme x la distance du centre à l'ordonnée ou CP, $a - x$ sera la petite abscisse, $a + x$ la grande, & l'on aura $yy . aa - xx :: bb . aa$, & $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa} = \overline{aa - xx} \times \frac{bb}{aa}$. Par où l'on voit que l'équation à l'ellipse ne differe de celle du cercle, que parce que les axes sont inégaux, & qu'elle renferme le rapport des quarrés de leurs moitiés, de manière que les supposant égaux, l'ellipse s'arrondit, & son équation devient celle du cercle, $yy = \overline{aa - xx} \times 1 = aa - xx$.

4°. Une troisième proportionnelle aux deux axes, s'appelle *Paramètre* du premier de la proportion; ensorte que si l'on a, $2a . 2b :: 2b . p$, la ligne p sera sur le *module* ou paramètre du grand axe, & l'on aura $p = \frac{4bb}{2a} = \frac{2bb}{a}$, ou $bb = \frac{ap}{2}$, & enfin $\frac{bb}{a} = \frac{1}{2}p$.

5°, Si dans l'équation de l'ellipse on substitue $\frac{ap}{a2}$ à la place de bb son égale, il viendra dans la première $yy = px - \frac{pxx}{2a}$, & dans la seconde $yy = \frac{ap}{2} - \frac{pxx}{2a}$, qui sont d'autres équations de l'ellipse, qu'on appelle *équations au paramètre*.

6°. Donc si dans ces deux équations on multiplie tout par $2a$, il viendra dans la première

$2ayy = 2apx - pxx$, & dans la seconde, $2ayy = aap - pxx$; ce qui donne dans la première $2ax - xx . yy :: 2a . p$, & dans la seconde $aa - xx . yy :: 2a . p$; c'est-à-dire, que dans cette courbe *le quarré de l'ordonnée au grand axe est au rectangle de ses abscisses, comme le paramètre du grand axe est au grand axe.*

7°. Puisque (n° 3.) $aayy = aabb - bbxx$, on aura, en transposant $bbxx = aabb - aayy = \overline{bb - yy} \times aa$; & par conséquent $xx . aa :: bb - yy . bb$: Or $x = CP = MV$ ordonnée au petit axe; $bb - yy$ est le produit de $b + y = bV$, par $b - y = BV$, (fig. 2), qui sont les abscisses du petit axe : donc le *quarré de l'ordonnée au petit axe est au rectangle de ses abscisses, comme le quarré de la moitié du grand axe est au quarré de la moitié du petit*, & son équation est $xx = \overline{bb - yy} \times \frac{aa}{bb}$, en nommant x l'ordonnée, & y la coupée comptée du centre.

8°. Donc, dans tout ce qui ne dépend pas du rapport des foyers, *le petit axe a les mêmes propriétés que le grand*, puisqu'il a la même équation.

9°. Les ordonnées de l'ellipse étant proportionnelles à celles du cercle (n°. 2.) la somme des premières, ou *la surface de l'ellipse*, est à la somme des secondes, ou *à l'aire du cercle*, comme une ordonnée quelconque de l'ellipse est à sa correspondante dans le cercle, & par conséquent, comme CB à CD, ou comme CB à CA, c'est-à-dire, comme *le petit axe au grand axe.*

Pareillement, si on décrit un cercle autour du petit axe, on démontrera de même que *l'aire de ce cercle décrit autour du petit axe, est à la surface*

de l'ellipse, comme le petit axe au grand axe.

10°. D'où il suit que *la surface de l'ellipse est en raison composée de ses axes, & égale à celle d'un cercle dont le diamètre seroit moyen proportionnel entre les deux axes de l'ellipse.* Car, 1°. puisque (n°. précéd.) la surface de l'ellipse a même raison avec l'aire du cercle inscrit, que celle du cercle circonscrit avec celle de l'ellipse, la surface de l'ellipse est moyenne proportionnelle entre ces deux aires, qui sont entr'elles comme bb & aa; par conséquent le quarré de la surface de l'ellipse est proportionnel au produit de bb par aa: donc en tirant les racines, la surface de l'ellipse est proportionnelle à ab, produit de ses axes. Or, 2°. l'aire d'un cercle dont le diamètre seroit moyen proportionnel entre les deux axes de l'ellipse, seroit de même moyenne proportionnelle entre l'aire du cercle inscrit, & celle du cercle circonscrit; donc elle seroit égale à celle de l'ellipse.

11°. Si de l'extrémité B du petit axe BC & de l'intervalle CA, on porte la pointe du compas de part & d'autre sur le grand axe, les points F, f, marqués sur cet axe par le compas, seront nommés *foyers*, Ff, l'*excentricité*; & on aura $BF = a$; & nommant c la *demi-excentricité* FC, à cause du triangle rectangle BCF, on aura $bb = aa - cc$, & par conséquent $a + c . b :: b . a - c$; or af ou AF, distance d'un sommet au plus proche foyer, $= a - c$, & Af ou aF distance du sommet au foyer le plus éloigné $= a + c$. Donc *le petit demi-axe de l'ellipse est moyen proportionnel entre les distances d'un des foyers aux deux sommets ou extrémités du grand axe.*

12°. De même, puisque par la construction

$2BF = aF + FA$, on a la proportion arithmétique, $aF : BF :: BF : AF$; donc B, ou l'extrémité du petit axe, est *la moyenne distance de l'ellipse par rapport au foyer.*

13°. Puisque la somme des lignes tirées des deux foyers à l'extrémité du petit axe, est égale au grand axe, & que la somme des lignes tirées des deux foyers à l'extrémité A du grand axe (fig. 2.) est pareillement égale à ce grand axe, il a fallu qu'à proportion que fA a décru dans son mouvement angulaire & dans son passage de A à B, FA ait crû de la même quantité, & qu'ainsi la somme des lignes tirées des foyers à chacun des points de l'arc AB, ou de la circonférence de l'ellipse, soit toujours demeurée la même, & égale au grand axe.

Pour le démontrer rigoureusement, il suffit de faire voir que de cette égalité supposée, il résulte la même équation pour l'ellipse qu'au n° 3.

Puisque $fM + FM = 2a$ par l'hypothèse, si on nomme $2z$ la différence de fM à FM, on aura $fM = a + z$, & $FM = a - z$, partant $fM^2 = aa + 2az + zz$ & $FM^2 = aa - 2az + zz$. Donc, à cause des triangles rectangles fMP, FMP, & faisant $CP = x$, par conséquent $fP = c + x$, $FP = c - x$, on aura les deux équations suivantes :

$$cc - 2cx + xx + yy = aa - 2az + zz$$
$$cc + 2cx + xx + yy = aa + 2az + zz$$

Et ôtant la première de la seconde, le premier membre du premier, le second du second, on aura $4cx = 4az$, & $z = \frac{cx}{a}$, $zz = \frac{ccxx}{aa}$: mettant donc ces valeurs de z & de zz dans la

première équation, il viendra $cc - 2cx + xx + yy = aa - 2cx + \frac{ccxx}{aa}$. Réduisant & multipliant par aa, on aura $aacc + aaxx + aayy = a^4 + ccxx$, & $aayy = a^4 - aacc - aaxx + ccxx$. Or le second membre est le produit de $aa - cc$ par $aa - xx$, & $aa - cc = bb$ (nº 11.); donc $yy . aa - xx :: aa - cc = bb . aa$; ce qui est la propriété de l'ellipse (nº 3.); donc dans cette courbe, *la somme de deux lignes tirées des foyers à un même point quelconque de son périmètre, est égale au grand axe.* Nous nommerons dans la suite *Rayon vecteur*, toute ligne tirée du foyer à la circonférence de l'ellipse.

14°. Cette propriété de l'ellipse nous donne la manière de la décrire d'un mouvement continu. Car puisque $fM + FM = 2a$ ou le grand axe, si on attache sur un plan les deux bouts d'un fil fMF en deux points Ff, dont la distance Ff soit moindre que la longueur du fil, alors si, par le moyen d'un stile, on tient toujours ce fil tendu, en le faisant tourner autour de ces deux points, il décrira une courbe réguliérement allongée & rétrécie, ou une *ellipse* dont le grand axe sera égal à la longueur du fil, & l'excentricité égale à la distance des piquets qui marqueront les *foyers*.

15°. Il suit de-là que l'ellipse ne differe du cercle, qu'en ce que le cercle est décrit autour d'un centre unique, & que l'ellipse l'est autour d'un centre allongé, ou, ce qui est le même, autour de deux centres séparés par une ligne droite qu'on nomme *excentricité*; ce qui fait que l'ellipse participe de la courbure du cercle & de la

rectitude de la ligne droite, & que comme tous les diamètres sont égaux dans le cercle, la somme de toutes les lignes tirées d'un point quelconque de l'ellipse aux deux extrémités du centre, ou aux deux foyers, est toujours égale au grand axe, & toujours la même dans l'ellipse.

Si donc les foyers se rapprochent, l'ellipse approchera de plus en plus du cercle, & se confondra avec lui, si les foyers se réunissent & se confondent. Si, au contraire, les foyers s'éloignent à une distance égale à la longueur du fil, l'ellipse devient une ligne droite, & entre ces cas extrêmes il se trouve une infinité d'ellipses : de manière que le grand axe demeurant le même, les ellipses décrites autour de lui, seront toutes de différentes espèces, selon la variation du rapport de la distance de leurs foyers à ce grand axe, ou de la distance de leurs sommets à leurs foyers ; ce qui fait qu'elles seront toutes d'une excentricité différente, n'auront pas leurs côtés homologues proportionnels, & différeront autant entr'elles, que leurs extrêmes diffèrent du cercle & de la ligne droite. Mais si à mesure qu'on augmente la distance des foyers, on augmente proportionnellement la longueur du fil, ou le grand axe, les ellipses seront différentes en grandeur comme les cercles, mais seront comme eux de la même espèce, seront des figures semblables, ayant leurs côtés homologues proportionnels, & auront le même rapport ou la même différence avec le cercle. Tout cela suit également de la génération décrite n° 2.

16°. Si le centre, ou le foyer inférieur de l'ellipse, s'éloigne à l'infini de l'autre foyer, l'ellipse deviendra infinie, & se nommera *Parabole.* Son

excentricité ſera infinie, & aura toujours le même rapport avec le grand axe, de manière que toutes les variations finies qu'on y voudroit ſuppoſer, ſeroient infiniment petites, ou nulles par rapport à cette infinité. D'où il ſuit qu'à la différence des ellipſes ordinaires, toutes les *Paraboles* ou ellipſes infinies ſont ſemblables & d'une ſeule eſpèce; mais l'équation à l'ellipſe n'en ſubſiſte pas moins, & il ne peut y avoir de différence que celle qu'y apporte l'infini. On a donc alors, comme nº 5, $yy=px-\frac{pxx}{2a}$. Or, à cauſe du dénominateur infini $2a$, tant que x eſt fini, $\frac{pxx}{2a}$ eſt infiniment petit ou nul par rapport à px: donc l'équation à la parabole eſt ſimplement $yy=px$, où x eſt comptée du ſommet, la manière de compter du centre ne pouvant avoir lieu à cauſe de ſa diſtance infinie. Donc *dans la parabole le quarré de l'ordonnée eſt égal au produit de la petite abſciſſe par le paramètre*, & parce que celui-ci eſt conſtant, *proportionnel à ſon abſciſſe*.

En effet, la grande abſciſſe étant infinie, doit être regardée comme une quantité conſtante; donc en ce cas le rectangle des abſciſſes, auquel le quarré de l'ordonnée eſt proportionnel (nº 2.) eſt proportionnel à la petite abſciſſe; de manière que, pour avoir la nature de la *parabole*, il ne s'agit plus que de rechercher la valeur p du paramètre.

17º. Dans l'ellipſe le grand axe eſt égal à la diſtance du foyer inférieur à la rencontre de l'ordonnée, plus à la diſtance de cette ordonnée au ſommet, ou à l'abſciſſe, plus à la diſtance du foyer ſupérieur à ce ſommet; donc $fM+FM$ eſt égal à ces trois ſommes; & c'eſt la même

chose dans l'ellipse infinie ou *parabole* : or, dans la parabole fM est infini, parallèle & égal à la distance de f à l'ordonnée, à cause de l'angle MfA ou de l'arc MA infiniment petit ou nul par rapport à fM & à fP séparément. Donc FM est égal à l'abscisse x, plus à la distance du foyer F au sommet que je nomme d : donc $FP = x - d$ ou $d - x$ selon la position de l'ordonnée au-dessous ou au-dessus du foyer, & dans ces deux cas $FP^2 = dd - 2dx + xx$, & $FM^2 = xx + 2dx + dd$: donc par la propriété du triangle rectangle MPF, $MP^2 = yy = xx + 2dx + dd + 2dx - xx - dd = 4dx = px$: donc $p = 4d$, & *dans la parabole le paramètre est égal à quatre fois la distance du foyer au sommet.*

18°. Donc si à la distance $AD = AF$ (fig. 3.) on tire la ligne Dn nommée *directrice* perpendiculaire sur DAF; que sur tous ses points on élève des perpendiculaires parallèles à DPE, & que sur chacune d'elles, comme nO on prenne $nM = MF$ distance du foyer F, de la même manière que $AD = AF$, la courbe qui passera par tous ces points sera une *parabole*. Car nM par la construction $= PA + AD$, $AD = AF = d$; donc nM ou son égale $MF = d + x$; donc $yy = 4dx$, & $p = 4d$. D'où il suit que *dans la parabole le rayon vecteur est toujours égal à la somme de l'abscisse & de la distance du foyer au sommet.*

Il est évident par cette construction que la parabole ne diffère de l'ellipse, que parce que le diamètre MO y est parallèle à l'axe AFP, ou, ce qui est le même, ne le rencontre qu'à une distance infinie; de manière que ne pouvant attacher l'autre

bout du fil ſur le prolongement de *A P* à une diſtance infinie pour décrire l'ellipſe infinie ou parabole, c'eſt la même choſe de le tendre dans la direction de *M O*, parallèle à *A P*, tandis que l'autre bout eſt attaché en *F.* C'eſt ce que l'on peut faire par le moyen d'une régle *Mo*, qui ſe meut parallélement à elle-même, & ce que nous venons d'exécuter par le moyen de la directrice.

19°. Puiſque dans la parabole $yy = px$, il eſt clair que x croiſſant, yy croît auſſi, & que la courbe n'eſt point rentrante, & va toujours en s'élargiſſant. Mais puiſque y croît ſeulement comme $\sqrt{x}$, cette courbe s'élargit moins qu'elle ne s'allonge, & conſerve toujours ce caractère de l'ellipſe. Dans l'ellipſe où a eſt fini & déterminé, ſi l'on fait $x = 2a$, l'équation de cette courbe $yy = \frac{2bbx}{a} - \frac{bbxx}{aa}$ (n° 2.), devient $yy = 4bb - 4bb = o$; ce qui marque que l'ellipſe eſt rentrante & refermée; & ſi l'on fait $x = a$, on aura $yy = 2bb - bb = bb$, & l'ordonnée ſera égale au demi-petit axe.

En rigueur, puiſque la parabole eſt une ellipſe infinie, ſon équation eſt $yy = \frac{2bbx}{a} - \frac{bbxx}{aa}$; & ce n'eſt que parce que le ſecond terme eſt infiniment petit ou nul par rapport au premier, tant que x eſt finie, qu'elle devient $yy = \frac{2bbx}{a}$ ou px. Mais ſi x devient infinie comme a, on aura comme dans l'ellipſe $yy = 2bb - bb = bb$; ce qui continue de prouver que la parabole n'ayant de ſecond axe qu'à une diſtance infinie, elle n'en a point de déterminé, ou n'en a point tout court.

20°. Si l'ellipſe devient plus qu'infinie, ſon équation ſubſiſte, laquelle, en comptant les coupées du centre, eſt $yy = aa - xx \times \frac{bb}{aa}$; mais alors, pour rendre l'axe conjugué poſſible, il faut changer le ſigne de ſon quarré; c'eſt-à-dire, qu'il le faut prendre négativement & en ſens contraire de ce qu'il étoit pris dans l'ellipſe; ce qui donne $yy = aa - xx \times \frac{-bb}{aa}$, ou $yy = aa - xx \times -\frac{bb}{aa}$; d'où réſulte également $yy = \frac{-aabb + bbxx}{aa}$, & en ordonnant $yy = \frac{bbxx - aabb}{aa}$; ou ce qui eſt le même, $yy = xx - aa \times \frac{bb}{aa}$; ce qui change l'ellipſe en *hyperbole*, & donne ſon équation, dans laquelle le produit $xx - aa$ de $x + a$ par $x - a$, marque que la petite abſciſſe AP (fig. 5.) étant exprimée par $x - a$, au lieu de l'être par $a - x$, comme dans l'ellipſe, il faut que le centre & le demi-axe a ſoient pris en arrière, en dehors de la concavité de la courbe, & en ſens contraire de ce qu'il eſt pris dans l'ellipſe.

Pour concevoir la raiſon de ce changement, il ſuffit de faire voir qu'une quantité affirmative qui paſſe par l'infini, & s'étend au-delà, devient négative dans ce paſſage, & que l'équation ci-deſſus qui en réſulte, exprime une courbe non refermée, qui s'étend toujours, & s'élargit beaucoup plus que la parabole.

Soit 1°. la fraction $\frac{1}{u}$; tant que u ſera fini & affirmatif, la fraction le ſera auſſi; & ſi u diminue par degrés, la fraction croîtra à proportion, de manière que ſi u eſt infiniment plus petit ou $= o$, la fraction ſera infinie : donc ſi u devient

moindre encore ou négatif, la fraction sera plus qu'infinie, & elle-même négative par la règle des signes.

2°. Si *ABD* (fig. 4.) est un arc de cercle dont *C* soit le centre, & que cet arc se détende par degrés, de manière que diminuant de courbure, il devienne partie d'un plus grand cercle, le centre *C* s'éloignera à proportion. Si donc l'arc se détend de plus en plus jusqu'à devenir une ligne droite, le rayon *BC* qui aura été en augmentant continuellement, sera infini; car on ne sçauroit considérer une ligne droite finie ou une ligne infiniment peu courbe, comme un arc de cercle, si ce cercle, & par conséquent son rayon, n'est infini. Si donc l'arc *ABD*, après être devenu une ligne droite, continue à se débander par degrés, il se recourbera de l'autre côté; le centre de courbure *O* sera transporté à l'opposite de *C*; & le rayon *CB*, auparavant affirmatif, sera devenu négatif, c'est-à-dire, affecté d'un signe contraire, dès qu'on l'aura voulu faire *plus qu'infini :* expression relative à une position donnée, qui marque qu'après que le rayon sera étendu à l'infini, en absorbant tout l'espace du côté de *C*, il ne peut plus croître que du côté opposé *O*, où n'étant pas infini, il peut de nouveau être soumis au calcul, & où on peut lui trouver un second diamètre conjugué, comme dans les deux hyperboles opposées (fig. 5.).

Par cette raison, si la tangente *GT* (fig. 2) augmente par degrés, & devient infinie, elle sera perpendiculaire sur le petit axe *BC*, & parallèle au grand axe *Aa*; & si elle devient plus qu'infinie, elle divergera du côté de *A*, & sera convergente du côté *a*, où elle viendra de nouveau cou-

per le prolongement de l'axe $A a$, mais dans un ſens oppoſé. Il en ſera donc de même de l'ellipſe. Lorſqu'elle eſt devenue infinie; & que $f M$ eſt devenu $M o$ parallèle à $A P$ (fig. 3.), ſi elle devient plus qu'infinie, $M o$ perdra ſon parallèliſme, divergera du côté de la concavité, ſera convergent du côté de C, & deviendra $R C$ ou $R g$ (fig. 5.); ce qui tranſporte les axes du côté de la convexité, change les ſignes de l'équation, & donne $y y = x x - a a \times \frac{b b}{a a}$.

3°. Il eſt évident que cette équation $yy = xx - a a \times \frac{b b}{a a}$ exprime une courbe qui s'étend plus que la parabole, & par conſéquent une ellipſe plus qu'infinie. Car ſi l'on compte les coupées du ſommet, l'équation précédente deviendra $yy = 2 a x + x x \times \frac{b b}{a a}$; & parce que $\frac{b b}{a a}$ eſt conſtant, yy croîtra comme $2 a x + x x$, y comme $\sqrt{2ax + xx} > \sqrt{x}$, plus grand même que x, & y croîtra dans un rapport beaucoup plus grand que dans la parabole, ou appartiendra à une courbe beaucoup plus qu'infinie.

21°. Il ſuit de cette équation que les axes $A a$, $B b$ des deux hyperboles oppoſées $M A R$, $g a f$ (fig. 5.) ſont compris entre les convexités de ces branches; que l'axe $A a$ qui s'appelle *premier axe*, *axe principal*, *axe tranſverſe*, eſt déterminé par la rencontre des deux hyperboles oppoſées, & que $B b$ qui s'appelle *ſecond axe*, *axe droit*, n'eſt déterminé que par les hyperboles latérales $H b$, $B h$. On peut donc concevoir que l'hyperbole, après s'être étendu à l'infini entre les côtés d'un angle donné de grandeur $y C X$, & avoir atteint

ces côtés à une diſtance infinie, remonte latéralement entre l'un de ces côtés, & tel autre qui forme avec lui l'angle de ſupplément, pour revenir enſuite entre les côtés de l'angle oppoſé au ſommet du premier, tourner ſa convexité vers la convexité de ſa première branche à une diſtance finie $A a$, qui s'appelle premier axe, & former ainſi le ſyſtème de huit branches de courbe, fermant un eſpace entre leurs convexités par quatre points de réunion infiniment éloignés du centre.

22°. Puiſque l'équation de l'hyperbole ne diffère de celle de l'ellipſe, que par la différence des ſignes de l'un des axes, il s'enſuit que la plûpart de leurs propriétés ſont les mêmes, & que pour l'ordinaire la différence ne conſiſte que dans les ſignes, du moins quant aux expreſſions où entrent les axes.

23°. Si donc on conſerve les mêmes dénominations que dans l'ellipſe, on aura (fig. 5.) $CA = a$, CB ou $Cb = b$, l'excentricité $FC = c$, $af = AF = c - a$, $Af = aF = c + a$; CP ou la coupée compriſe entre le centre & l'ordonnée $= x$, $AP = x - a$, $aP = x + a$, & le produit de ces deux derniers ſera $xx - aa$, qui multiplié par $+ \frac{bb}{aa}$, donne comme ci-deſſus $yy = \frac{bbxx - aabb}{aa}$. Par où l'on voit que pour changer l'ellipſe en hyperbole, il eſt indifférent de donner le ſigne — ou à bb ou à aa; ce qui eſt de ſoi évident, puiſque l'un des axes, tranſporté du côté de la convexité, y tranſporte l'autre néceſſairement.

24°. Puiſque dans l'ellipſe (n° 11.) $bb = aa - cc$, & que dans l'hyperbole il eſt néceſſaire de

donner un autre ſigne à l'un des axes ſans autre changement, on aura dans cette courbe $bb = cc - aa = c - a (= AF = af) \times c + a (= Af$ ou $aF)$. D'où il ſuit que $Ab = c$, & que pour déterminer le ſecond axe, il faut du point A comme centre & de l'intervalle FC, décrire des arcs de cercle à droite & à gauche de ce ſecond axe, & ces points d'interſection en ſeront les extrémités.

25°. Pareillement, puiſque dans l'ellipſe $FM + fM = 2a$, on aura dans l'hyperbole $FM - fM = -2a$, ou $fM - FM = 2a$. D'où il ſuit que pour décrire une hyperbole, il faut prendre ſur le prolongement d'une ligne déterminée Aa deux points F, f également éloignés du centre C de cette ligne Aa; & dans le plan ſur lequel cette ligne eſt poſée, une infinité de points comme M, tels que la différence de leurs diſtances fM, FM aux points fF conſidérés comme *foyers*, ſoit toujours égale à la ligne Aa, & par ces points de recherche faire paſſer une courbe. D'où il ſuit que *dans l'hyperbole la différence des rayons vecteurs, menés des foyers à un même point quelconque de la courbe, eſt par-tout égale au premier axe*. On peut le démontrer comme dans l'ellipſe (n°. 13) en ſuppoſant l'égalité de cette différence, & en tirant l'équation à l'hyperbole. Car ſoit $fM - FM = 2a$, & $2z = fM + FM$, on aura $fM = z + a$; c'eſt-à-dire, égal à la moitié de la ſomme, plus la moitié de la différence, & $FM = z - a$; CP étant x, PF ſera $x - c$, & $Pf = x + c$: donc à cauſe des triangles rectangles MPF, MPf, on aura

FM^2 ou $zz - 2az + 2a = xx - 2cx + cc + yy$,
fM^2 ou $zz + 2az + aa = xx + 2cx + cc + yy$:

D'où

d'où viendra par soustraction, comme dans l'ellipse, $z = \frac{cx}{a}$: substituant, réduisant & multipliant, comme (n° 13.) on aura $aayy = a^4 - aacc - aaxx + ccxx = ccxx - aaxx - aacc + a^4 = \overline{cc - aa} \times \overline{xx - aa}$; & mettant bb à la place de $cc - aa$ (n° 24.) on aura $aayy = bb \times \overline{xx - aa}$, & $yy = \frac{bb}{aa} \times \overline{xx - aa}$, qui est l'équation à l'hyperbole. Donc $fM - FM = 2a$.

26. Il suit de là qu'il y a autant de sortes d'hyperboles, qu'il y a de différentes espèces d'ellipses, suivant les différens rapports de AF ou de FC à Aa ; de manière que si Aa augmentant, FC ou AF croît à proportion, les hyperboles seront différentes en grandeurs, mais les mêmes en espèces.

27. Si les deux axes de l'hyperbole sont égaux, l'hyperbole est nommée *équilatère* ; & alors le rapport des axes $\frac{bb}{aa} = 1$; de manière que l'équation à cette sorte d'hyperbole devient $yy = xx - aa$, qui ne diffère de celle du cercle $yy = aa - xx$, que par la différence des signes, ou la transposition des axes du côté de la convexité.

Si on compte dans ces deux cercles les coupées du sommet, on aura pour l'hyperbole $yy = 2ax + xx$, & pour le cercle $yy = 2ax - xx$: ce qui indique toujours que l'hyperbole est plus qu'infinie ; & qu'après avoir pris l'abscisse x depuis le sommet le plus proche jusqu'à l'ordonnée, il faut en quitter la direction, revenir en arrière pour prendre en sens contraire la seconde abscisse, depuis cette ordonnée jusqu'à l'autre sommet ; ce

qui donne $2a+x$, au lieu de $2a-x$ dans le cercle & l'ellipſe.

28. Puiſque $aayy = bbxx - aabb$ (n° 20.), on aura en tranſpoſant $bbxx = aayy + aabb$, & $xx . yy + bb :: aa . bb$; or $x = CP = ML$, ordonnée au ſecond axe Bb (fig. 5.); $bb + yy$, c'eſt la ſomme du quarré de la moitié du ſecond axe, & du quarré de la coupée $CL = MP = y$; donc *dans l'hyperbole le quarré xx de l'ordonnée au ſecond axe eſt proportionnel*, non au rectangle de ſes abſciſſes, mais *à la ſomme des quarrés de la coupée comptée du centre & du ſecond demi-axe*; & l'équation au ſecond axe, en appellant x l'ordonnée, y la coupée comptée du centre, eſt $xx = \frac{aabb + aayy}{bb}$.

Qu'on prenne BL pour la petite abſciſſe, elle ſera $y - b$, & la grande abſciſſe Lb ſera $y + b$, dont le produit eſt $yy - bb$, & non pas comme ci-deſſus (n° 7.) $yy + bb$. Donc il n'y a nul moyen de faire le quarré de l'ordonnée au ſecond axe de l'hyperbole proportionnel au produit de ſes abſciſſes, mais ſeulement à la ſomme des quarrés indiqués; ce qui eſt une ſuite des changemens de ſignes qu'exige l'hyperbole.

Comme dans l'ellipſe, une troiſiéme proportionnelle aux deux axes de l'hyperbole, s'appelle paramètre du premier de la proportion, & $2a . 2b :: 2b . p = \frac{2bb}{a}$, & $bb = \frac{1}{2}pa$: donc ſubſtituant cette valeur de bb, pour avoir l'équation au paramètre, il viendra dans la première où l'on compte les coupées du ſommet, $yy = px + \frac{pxx}{2a}$; & dans la ſeconde où l'on compte les cou-

pées du centre, $yy = \frac{pxx}{2a} - \frac{ap}{2}$. D'où il suit, comme dans l'ellipse, *que le quarré de l'ordonnée au premier axe de l'hyperbole est au rectangle de ses abscisses, comme le paramètre du premier axe est à ce premier axe*, & par la même raison que le *quarré du second axe est au quarré du premier, comme le paramètre du premier à ce premier.*

30. Puisque l'équation au paramètre est dans la parabole $yy = px$, dans l'ellipse $yy = px - \frac{pxx}{2a}$, & dans l'hyperbole $yy = px + \frac{pxx}{2a}$, il s'ensuit qu'en comptant les abscisses du sommet, *le quarré de l'ordonnée est par rapport au produit du paramètre par la petite abscisse*, égal *dans la parabole*, moindre *dans l'ellipse*, plus grand *dans l'hyperbole*; & c'est de ce rapport qu'elles tirent leurs dénominations qui signifient égalité, défaut & excès.

31. Puisque $bb = AF \times aF$ dans l'ellipse & dans l'hyperbole (n°s 11 & 23.), si l'on fait $AF = d$, on aura $aF = 2a - d$ dans l'ellipse, & $aF = 2a + d$ dans l'hyperbole, & $bb = \mp 2ad \mp dd$ dans ces deux courbes, en se servant de l'expression commune $\mp \pm$, & se souvenant que le signe supérieur est toujours pour l'ellipse: or $bb = \frac{ap}{2}$ (n°s 4 & 29.); donc $ap = 4ad \pm 2dd$, & $p = 4d \mp \frac{2dd}{a}$, ce qui devient $p = 4d$ dans la parabole, à cause du terme infiniment petit $\frac{2dd}{a}$. Donc puisque le cercle a son centre même pour foyer, il s'ensuit que généralement dans les *Sections Coniques*, *le paramètre est par rapport à la distance du sommet au foyer*, double *dans le cercle*; entre le double & le quadruple

dans tous les degrés intermédiaires *dans l'ellipse*; quadruple *dans la parabole*; plus que quadruple *dans l'hyperbole*, & ce dans tous les degrés, selon les différentes espèces de courbes que ce genre contient.

32. Si l'on fait $x = c$, c'est-à-dire, la coupée égale à la demi-excentricité, l'ordonnée passera par le foyer, & l'on aura $\pm aa \mp xx = \pm aa \mp cc = bb$ dans l'ellipse & dans l'hyperbole; & l'équation $\pm aa \mp xx \times \frac{bb}{aa} = yy$, ou en comptant du sommet, $\overline{2ax \mp xx} \times \frac{bb}{aa} = yy$, on aura cette forme, $\pm aa \mp cc$, ou $2ad \mp dd$ ($= bb$) $\times \frac{bb}{aa} = yy$, ou $yy = \frac{b^4}{aa}$, & tirant les racines $y = \frac{bb}{a} = \frac{1}{2} p$ (nos 4 & 29.); c'est à-dire, que dans ces deux courbes, l'ordonnée qui passe par le foyer, est égale à la moitié du paramètre. Or, dans ce cas x compté du sommet $= \frac{1}{4} p$ dans la parabole (n° précéd.); donc son équation $yy = px$ devient $yy = \frac{1}{4} pp$, & $y = \frac{1}{2} p$. Donc généralement, *dans toute Section Conique, l'ordonnée qui passe par le foyer, est égale à la moitié du paramètre.*

33. Si dans la parabole (fig. 3.) on prolonge le diamètre O M, tenant lieu d'un second rayon vecteur perpendiculairement à la directrice, de manière que $Mn = MF$; qu'on joigne F, n par la droite Fn, que dans l'ellipse (fig. 2.) on prolonge fM jusqu'en n, de manière que $Mn = MF$; qu'on joigne Fn; que de même dans l'hyperbole (fig. 5.) on prenne sur fM la partie Mn ou FM, & qu'on joigne Fn: alors si on divise également toutes ces droites Fn, & que par la

milieu on mene ſur chaque courbe la ligne droite TM au point M, *cette ligne TM ſera tangente en ce point.* Car par la conſtruction elle touchera le point M; & étant perpendiculaire ſur la baſe du triangle iſocele FMn, elle ſera dans tous ſes points à égale diſtance de F & de n: or il n'y a que le point M de la courbe qui ſoit à égale diſtance de Fn & de n, parce qu'au-deſſus ou au-deſſous du point M aboutiſſent d'autres rayons vecteurs, & par conſéquent d'autres lignes tirées ſur d'autres points n à droite ou à gauche du premier n; donc MT ne touche la courbe qu'au ſeul point M.

34. D'où il ſuit que dans toute Section conique; *l'angle formé par un rayon vecteur & la tangente au point de contact eſt toujours égal à l'angle formé par la même tangente, & l'autre rayon vecteur dirigé du même point à l'autre foyer;* car MT diviſant en deux également l'angle FMn, la concluſion eſt immédiate pour l'hyperbole (fig. 5.), & évidente pour l'ellipſe & la parabole (fig. 2 & 3.), au moyen des angles oppoſés au ſommet.

35. Si des foyers de l'ellipſe & de l'hyperbole (fig. 6 & 7.) on mene au point de contact les rayons FM, fM, & que des mêmes points Ff, on abaiſſe ſur la tangente les perpendiculaires FN, fQ, & du point N par le centre C, la ligne NC; il eſt évident que les lignes Ff, Fn étant coupées par le milieu aux points C & N, on aura $Ff . Fn :: FC . FN$; & par conſéquent, à cauſe de l'angle commun F, les triangles nFf, CFN ſeront ſemblables, & NC parallèle à fn eſt égale à ſa moitié, & par conſéquent à la moitié de Aa, ou $= AC$. Prolongeant NC juſqu'à ce qu'elle ren-

contre Qf prolongée, s'il est nécessaire, on aura $tC = CN$ à cause des triangles égaux fCt, FCN, & par conséquent $tC = AC = aC$. Or, qu'on prolonge FM jusqu'à ce qu'elle rencontre fQ prolongée, & que l'on tire la droite CQ, on démontrera de même qu'elle est parallèle à FR, égale à sa moitié, ou à AC. Donc si du centre C & de l'intervalle CA on décrit un cercle, il passera par les points A, N, Q, a, t; & par la propriété des cordes (fig. 6.), des sécantes (fig. 7.), on aura $tf \times fQ$, ou son égal $FN \times fQ = AF \times Fa$ quantité constante, égale au quarré de la moitié du second axe (n° 31.). D'où il suit que *dans l'ellipse & dans l'hyperbole, le produit des perpendiculaires abaissées des deux foyers sur la tangente, est égal au quarré de la moitié du second axe.*

36. D'où résulte cette propriété remarquable, que *les perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes aux différens points de la courbe, croissent comme les racines des rayons vecteurs* dans la parabole, *croissent plus* dans l'ellipse, *moins* dans l'hyperbole. Car à cause des triangles semblables fQM, FMN, on a $FN . FM :: fQ . fM$; donc $FN = \frac{FM \times fQ}{fM}$; & multipliant tout par FN, on a $FN^2 = \frac{FM}{fM} \times FN \times fQ$; donc puisque $FN \times fQ$ est constante (n°. précéd.) FN^2 croît comme $\frac{FM}{fM}$, & FN comme $\sqrt{\frac{FM}{fM}}$: donc quand FM croît, FN croîtroit comme $\sqrt{FM}$, si fM restoit constante. Or tel est le cas *de la parabole*, dans laquelle fM est infinie, & par conséquent constante. Au contraire, dans l'ellipse FM croissant,

fM décroît; & par conféquent la fraction qui exprime FN, croît plus que $\sqrt{FM}$; & parce que fM croît avec FM dans *l'hyperbole*, la fraction $\sqrt{\frac{FM}{fM}}$ ou FM y croît moins que dans la raifon de $\sqrt{FM}$.

37. Si d'un autre point de l'axe prolongé où il eft néceffaire, on mene au point de contact la perpendiculaire ME (fig. 2, 3, 5), PE comprife entre l'ordonnée & le point de l'axe où aboutit la perpendiculaire, eft appellée *foûnormale* ou *foûperpendiculaire*; PT comprife entre l'ordonnée & le point où la tangente fe réunit avec l'axe prolongé, *foûtangente*. Nous allons en rechercher la valeur par la valeur connue de certaines parties de l'axe.

38. Nous avons trouvé (n° 13 & 25.) dans l'ellipfe & dans l'hyperbole $z = \frac{cx}{a}$; donc $\pm a \mp z = \pm a \mp \frac{cx}{a} = \frac{\pm aa \mp cx}{a}$. Or (ibid.) $FM = \pm a \mp z$, $fM = a + z$; donc $FM = \frac{\pm aa \mp cx}{a}$, & $fM = \frac{aa + cx}{a}$.

39. Puifque ME eft parallèle à Fn, on a $fn = 2a . fF = 2c :: Mn = FM = \frac{\pm aa \mp cx}{a} . FE$; donc $FE = \frac{\pm aac \mp ccx}{aa}$.

Or $FP = c - x$: donc $PE = EF - FP = \frac{\pm aac \mp ccx}{aa} - c + x = \frac{\pm aax \mp ccx}{aa}$; ce qui eft l'expreffion de la *foûnormale* PE; & mettant bb à la place de fa valeur $\pm aa \mp cc$, on aura l'expreffion plus fimple $PE = \frac{bbx}{aa}$, ou mettant $\frac{1}{2} p$ à la place de $\frac{bb}{a}$, $PE = \frac{px}{2a}$.

Si au lieu de compter les coupées du centre, on

les compte du sommet, la coupée x de l'expression précédente sera $a \mp x$; & mettant cette valeur dans la dernière expression, on aura $PE = \frac{pa \pm px}{2a} = \frac{1}{2}p \mp \frac{px}{2a}$. Or, à cause de l'infinie $2a$ dans la parabole, le second terme y est infiniment petit ou nul par rapport au premier. Donc dans cette courbe $PE = \frac{1}{2}p$, & en général dans les Sections coniques, *la soûnormale est par rapport à l'ordonnée qui passe par le foyer ou à la moitié du paramètre*, *égale* dans la parabole, *moindre* dans l'ellipse, *plus grande* dans l'hyperbole.

40. Le triangle rectangle EMT donne $EP. PM :: PM. PT$; donc $PT = \frac{PM^2}{EP}$. Or $PM^2 = \frac{\pm aabb \mp bbxx}{aa}$; divisant donc cette quantité par $\frac{bbx}{aa}$, valeur de EP, il viendra $PT = \frac{\pm aabb \mp bbxx}{bbx} = \frac{\pm aa \mp xx}{x}$, valeur de la *soûtangente*.

En comptant les x du sommet, la valeur précédente devient $\frac{2ax \mp xx}{a \mp x}$; or dans la parabole où a est infini, $a \mp x = a$, & xx est infiniment petit ou nul par rapport à $2ax$; donc dans cette courbe $PT = 2x$.

Dans l'ellipse $\frac{2ax - xx}{a - x} > \frac{2ax - 2xx}{a - x} = 2x$; & dans *l'hyperbole* $\frac{2ax + xx}{a + x} < \frac{2ax - 2xx}{a + x} = 2x$: donc généralement, dans les Sections coniques, *la soûtangente est par rapport au double de l'abscisse*, *égale* dans la parabole, *plus grande* dans l'ellipse, *moindre* dans l'hyperbole.

41. Ajoutant CP à PT, c'est-à-dire, x à $\frac{aa - xx}{x}$ dans l'ellipse, retranchant PT de CP, c'est-

à-dire, $\frac{xx-aa}{x}$ de x dans l'hyperbole, on aura dans ces deux courbes $CT = x - \frac{xx+aa}{x} = \frac{aa}{x}$. Donc $CP . CA :: CA . CT$; & comme le petit axe (n° 8.) a les mêmes propriétés que le grand dans tout ce qui ne dépend pas du foyer & pour toutes les expressions où C n'entre pas, on aura de même (fig. 2.) $CV . CB :: CB . CG$; & au moyen de cette proportion on trouve aisément sur le grand ou sur le petit axe le point T ou G; d'où l'on peut mener une tangente sur le point donné M.

42. Retranchant AP de PT, & se servant de la seconde expression de PT (n° 40), on aura $AT = PT - AP = \frac{2ax \mp xx}{a \mp x} - x = \frac{ax}{a \mp x}$. Or, dans la *parabole*, à cause de $a \mp x = a$, $AT = x$; & dans *l'ellipse*, à cause de $a - x < a$, $AT > x$; $< x$ dans *l'hyperbole*, à cause de $a + x > a$. *Donc la distance du sommet à la rencontre de l'axe & de la tangente, est, par rapport à la petite abscisse, égale* dans la parabole, *plus grande* dans l'ellipse, *moindre* dans l'hyperbole.

43. Si $x = a$ dans l'ellipse, la tangente tombera à l'extrémité du petit axe, & AT sera $= \frac{aa}{a-a} = \frac{aa}{0}$, par conséquent infinie, & la tangente sera parallèle au grand axe.

Si x devient infinie dans la *parabole*, AT sera de même infinie, & la tangente parallèle au grand axe; ce qui provient de ce que la parabole n'a point d'axe conjugué, ou n'en a qu'à une distance infinie.

Mais dans l'*hyperbole* x devenant infinie, le dénominateur $a + x = x$, & $AT = a$. D'où il suit, 1°. que *le point de rencontre T de toutes les*

tangentes possibles ou finies de l'hyperbole avec son axe principal, est toujours compris entre le centre & le sommet; ce qui vient de ce que l'hyperbole s'élargit plus que la parabole, & de ce que le second rayon vecteur fM, après être devenu parallèle à l'axe dans la parabole, diverge de l'axe du côté de la concavité, & converge avec lui du côté de la convexité, quand l'ellipse devient plus qu'infinie.

D'où il suit, 2°. que *par le centre de l'hyperbole on peut mener de chaque côté de l'axe une ligne droite, qui n'aille toucher chaque branche de la courbe qu'à son extrémité infinie.* Ces tangentes infinies sont nommées *asymptôtes*, c'est-à dire, *non coincidentes;* & en effet ne touchant la courbe qu'à une distance infinie où l'on ne peut parvenir, elles ont la propriété de *s'approcher toujours de l'hyperbole, sans la toucher jamais.*

44 Il ne s'agit donc, pour tirer ces *asymptôtes*, que de déterminer l'angle que ces lignes doivent former au centre. Pour cela il faut déterminer *la valeur de la tangente ou perpendiculaire AS élevée* (fig. 5.) *depuis la tangente TM sur le sommet A de l'axe principal d'une Section conique*, & voir ensuite ce que cette valeur devient dans l'hyperbole, lorsque x est infinie.

Les triangles semblables PMT, AST donnent la proportion : $TP = \frac{2ax \mp xx}{a \mp x} . AT = \frac{ax}{a \mp x} :: PM . AS$; donc, à cause du même dénominateur $a \mp x$, on a $2ax \mp xx . ax :: PM . AS$, & plus simplement, $2a \mp x . a :: PM . AS$, élevant au quarré, & mettant pour PM^2 sa valeur, on aura $4aa \mp 4ax + xx . aa :: \frac{2abbx \mp bbxx}{aa} . AS^2$;

donc $AS^2 = \frac{2abbx \mp bbxx}{4aa \mp 4ax + xx}$.

Or, dans *la parabole* le ſecond terme du numérateur, les deux derniers du dénominateur, ſont infiniment petits, chacun par rapport à leurs premiers : donc dans cette courbe $AS^2 = \frac{2abbx}{4aa} = \frac{bbx}{2a} = \frac{1}{4}px = \frac{1}{4}yy$, & $AS = \frac{1}{2}y$.

Dans l'hyperbole, au contraire, quand x eſt infinie, le premier terme du numérateur & les deux premiers du dénominateur ſont infiniment petits, chacun par rapport à leurs derniers ; donc alors $AS^2 = \frac{bbxx}{xx} = bb$, & $AS = b$. Par où l'on voit *que ſi ſur la tangente ou perpendiculaire à l'extrémité du premier axe d'une hyperbole, on prend une partie égale à la moitié du ſecond axe, & que par ſon extrémité on tire une ſeconde ligne droite du centre, cette ligne ſera une* aſymptôte.

45. D'où il ſuit que *l'angle des aſymptôtes ſera droit, aigu ou obtus, ſelon que le ſecond axe ſera égal, plus petit ou plus grand que le premier ;* car ACy, qui en eſt la moitié, eſt plus petit, égal ou plus grand que 45°, ſelon que Cb eſt plus petit, égal, ou plus grand que CA.

46. Ayant prolongé de part & d'autre une ordonnée quelconque RO à l'axe principal juſqu'aux aſymptôtes en V & u, on aura (fig. 5.) $RV \times Ru = bC^2$, & $RV . bC :: bC . Ru$.

Car l'équation à l'axe étant (n° 20.) $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$, on aura, en tranſpoſant, $bb = bC^2 = \frac{bbxx}{aa} - yy = \left(\frac{bx}{a} - y\right) \times \left(\frac{bx}{a} + y\right)$. Or à cauſe des triangles ſemblables CAb, COV, $CA . Cb :: CO . OV = \frac{bx}{a}$; donc $RV = \frac{bx}{a} - y$,

& $Ru = \frac{bx}{a} + y$; donc $RV \times Ru = bC^2$. Par la même raison $ZN \times Nz = bb = bC^2$; par conséquent $RV . NZ :: Nz . Ru$.

47. Puisque $NZ = \frac{bx}{a} - y$ (n° précéd.), & $Nz = \frac{bx}{a} + y$, il s'ensuit que $Mz = Nz - 2y = \frac{bx}{a} + y - 2y = \frac{bx}{a} - y = Nz$; c'est-à-dire, que, si *l'ordonnée au premier axe est prolongée de part & d'autre jusqu'aux asymptôtes, ses deux parties interceptées entre l'hyperbole & les asymptôtes, sont égales entr'elles.*

48. *Si l'on tire également une ligne quelconque* Rr (fig. 8.) *d'une asymptôte à l'autre à travers une hyperbole, ses parties* RN, Or, *comprises entre chaque asymptôte & l'hyperbole, seront pareillement égales entr'elles.* Car, à cause des triangles semblables RNZ, ROV, $RN . NZ :: RO . OV$; & à cause des triangles semblables rOu, rNz, $rN . Nz :: rO . Ou$; & en composant $RN \times rN . NZ \times Nz :: RO \times rO . OV \times Ou$: or $NZ \times Nz = OV \times Ou$ (n° 46.); donc $RN \times rN = RO \times rO$, ou, ce qui est le même, $RN \times \overline{NO + Or} = \overline{RN + NO} \times Or$; par conséquent $RN \times NO + RN \times Or = RN \times Or + NO \times Or$, & $RN \times NO = NO \times Or$; & à cause de la partie commune NO, $RN = Or$.

49. *Il suit de là qu'une tangente* MT (fig. 8.) *terminée aux asymptôtes, est divisée en deux également au point de contact* t. Car si Rr remontoit parallélement à elle-même, les points N & O se rapprocheroient continuellement, & l'on auroit toujours $RN = Or$; donc au point de contingence t, N & O se confondant, & RN devenant Mt,

Or devenant Tt, on aura $Mt = tT$; ce qui donne une troisiéme manière de mener une tangente à l'hyperbole, en cherchant sur les asymptôtes des points également distans du point proposé du contact, & par ces trois points tirant une ligne droite.

50. A cause des triangles semblables Mtz, RNZ, on a $Mt . tZ :: RN . NZ$, & à cause des triangles Ttz, rNz, on a $Tt . tz :: rN . Nz$; & en raison composée, $Mt \times Tt = Mt^2 . tZ \times tz : RN \times rN . NZ \times Nz$: or $tZ \times tz = NZ \times Nz$; donc $Mt^2 = RN \times rN$.

51. Les diagonales Ab, CY du rectangle $CAYb$, fait sous les demi-axes, étant égales & se coupant en deux également en K (fig. 5.), on a $AK = CK = KY = Kb = \frac{1}{2} CY$; donc CK^2 ou $AK^2 = \frac{1}{4} AC^2 + \frac{1}{4} CB^2 = \frac{1}{4} aa + \frac{1}{4} bb$, & AK^2 est appellé *la Puissance* de l'hyperbole, laquelle conséquemment *est égale au quart des quarrés des demi-axes conjugués, ou à la seiziéme partie des axes entiers.*

52. Si l'on mene RY parallèle à AK ou à l'asymptôte CX & Rd parallèle à CY, à cause des triangles semblables VRY, AKY, on aura $RY . AK :: VR . AY = Cb :: Cb . Ru$ (n° 46.); & à cause des triangles semblables AKY, dRu, on a $AY = Cb . Ru :: KY = AK . CY$; donc $RY . AK :: AK . CY$; donc $RY \times CY = AK^2$; c'est-à-dire, que si *de l'hyperbole on mene sur l'asymptôte voisine des ordonnées parallèles à l'autre asymptôte, le rectangle fait de ces ordonnées par leurs abscisses prises sur l'asymptôte, & comptées du centre, est toujours une quantité constante & égale à la puissance de l'hyperbole.*

53. Si donc on fait $CY = x$, $RY = y$, $AK = k$, on aura $xy = kk$, ou $xy = \frac{1}{4} aa +$

$\frac{1}{4}bb$, pour l'*équation de l'hyperbole rapportée à ſon aſymptôte*.

54. Si l'on tire Nq ou telle autre ligne qu'on voudra, parallèle à l'autre aſymptôte, on démontrera de même que $Nq \times Cq = kk$, & que $Nq \times cq = RY \times CY$. D'où il ſuit que *les ordonnées à l'aſymptôte d'une hyperbole ſont réciproques à leurs abſciſſes*; & que faiſant les abſciſſes conſécutivement 1, 2, 3, 4, 5, 6, & les ordonnées correſpondantes ſeront 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, &c. & que leur ſommet exprimera l'eſpace hyperbolique entier compris entre l'hyperbole & ſon aſymptôte.

Or cette ſuite continuée à l'infini a une valeur infinie, puiſqu'elle renferme toutes les progreſſions géométriques deſcendantes poſſibles qui ont $\frac{1}{2}$ pour expoſant, dont le nombre eſt infini, & qui ont chacune pour valeur l'unité, ou des parties finies & déterminées de l'unité : d'où il ſuit que l'*eſpace compris entre l'hyperbole & ſon aſymptôte, eſt infini.*

Propriétés des Sections Coniques rapportées à leurs diamètres

55. On appelle *diamètre* d'une Section conique, toute droite qui paſſe par ſon centre. Si deux de ces diamètres ſont perpendiculaires l'un à l'autre, ils ſe nomment *axes*; s'ils ſont obliques, ils conſervent le nom générique de *diamètres*. Si de deux diamètres qui s'entrecoupent au centre, l'un eſt parallèle aux ordonnées de l'autre ou à la tangente qui paſſe par ſon extrémité, ils ſont nommés *diamètres conjugués*. La tangente, en effet, n'eſt que

la première ordonnée, une ordonnée qui est infiniment petite, qui entre infiniment peu dans la courbe. On appelle *premier* celui des deux diamètres conjugués, dont on considere les ordonnées : en conséquence on appelle *premier diamètre de l'hyperbole*, celui qui rencontre les deux hyperboles opposées dont on cherche les propriétés; *second diamètre*, celui qui ne les rencontre pas, mais seulement les deux hyperboles latérales conjuguées aux premières, opposées l'une à l'autre, par rapport auxquelles il devient premier diamètre. Le premier diamètre s'appelle aussi *diamètre déterminé*, parce qu'il l'est par les deux points R, g (fig. 5.), où il rencontre la section de part & d'autre. Le second diamètre Hh est en lui-même, & en vertu de deux sections opposées, *indéterminé*. On le détermine en traçant les hyperboles conjuguées, ou, comme pour le second axe, en tirant sur lui de l'origine du premier, des lignes parallèles aux asymptôtes, telles que RH, Rh, de la même maniere que Ab est parallèle à CX. En effet, puisque $CY = Rd$, & que $HC = Rr$ (n° 49.) les triangles équiangles CHY, Rdr seront égaux, & $HY = dr = RY$, & partant $HY \times YC = kk$ (n° 52.); d'où il suit que le point H est à l'hyperbole conjuguée Hb, & est par conséquent l'origine ou l'extrémité du diamètre Hh.

On appelle de même *premier diamètre*, celui qui tombe dans l'angle formé par les asymptôtes qui embrassent les deux hyperboles; *second*, celui qui tombe dans l'angle d'*à côté*, ou dans l'angle de Supplément. Car la tangente qui passe par l'origine du premier diamètre, étant égale & parallèle

au ſecond ; & celui-ci paſſant par le centre, où eſt l'origine des aſymptôtes, il eſt néceſſaire qu'il tombe dans l'angle d'à côté de celui par où paſſe le premier. C'eſt ainſi que *Cb* & *CA* paſſent dans deux angles différens, & que *CA* eſt un ſecond diamètre par rapport à l'hyperbole conjuguée *Hb*, de manière que ſi du centre *C* on prend ſur le prolongement de *Cb* une ligne égale à *bA*, on aura le foyer de cette hyperbole conjuguée, & l'on en démontrera les mêmes propriétés que pour les premières.

56. Tout diamètre partage ſa figure en deux également. Cela eſt évident pour l'ellipſe (fig. 9.); car puiſque $OD = EH$ dans le cercle, $oD = Eh$ dans l'ellipſe, & par conſéquent $oaEh = EaoD$.

Dans l'hyperbole (fig. 5.) prolongée, l'ordonnée *pA* juſqu'aux aſymptôtes en *x* & *s*, *sx* ſera parallèle à *yr*; & puiſque *yr* (n° 49.) eſt partagée également en deux par le diamètre *CRm*, *sx* ſera de même coupée également par ce diamètre : donc puiſque $Ax = ps$ (n° 48.); il faut que $Am = mp$, & qu'ainſi tout diamètre partage ſes ordonnées en deux parties égales ; or toutes les ordonnées à un diamètre rempliſſent la figure : donc l'hyperbole eſt partagée en deux également par chaque diamètre.

C'eſt la même choſe dans la parabole, puiſque *AN* (fig. 3.) y eſt partagée également en *O*. Puiſque la parabole eſt une ellipſe, le diamètre *MO* entrecoupe véritablement l'axe *AE* au centre, & a ainſi les mêmes propriétés que les diamètres de l'ellipſe. Nous traitons ſa partie finie de parallèle à l'axe, parce que l'angle au centre étant infiniment petit, nous ne pouvons le repréſenter que par

le

le parallélisme de ses côtés. Toute la différence qu'il y a donc ici entre l'ellipse & la parabole, c'est que celle-ci n'ayant de second axe que dans l'infini, où l'on ne peut arriver, elle n'en a point pour nous de conjugués.

57. Maintenant, pour rechercher si les diamètres des Sections Coniques ont ou donnent les mêmes propriétés que leurs axes, soit $aoKDgbhEra$ une ellipse quelconque (fig. 9.), dont toutes les ordonnées oY, kV, gX, hQ, rS sont en raison constante avec les ordonnées OY, KV, GX, HQ, RS, correspondantes dans le cercle.

Soient OCH, RCG deux diamètres quelconques du cercle, lesquels se coupent à angles droits.

Soient oCh, rCg deux diamètres correspondans de l'ellipse.

KL est une ordonnée quelconque du cercle par rapport au diamètre CG; donc kl est l'ordonnée correspondante de l'ellipse par rapport au diamètre Cg correspondant au diamètre CG du cercle. Car si du point k on tire une parallèle à Co, elle passera par le point Y ou KL, coupe l'axe CD, de même que CO & Co s'entrecoupent au centre. On a donc les triangles semblables YLl, YKk, CoO, & par conséquent $LY . YK :: LY . Yk$; donc $LY + YK . YK :: lY + Yk . Yk$, & par conséquent $LK . lk :: CO . Co$: donc en faisant la coupée $Cl = u$, l'ordonnée $lk = z$, le demi-diamètre $Cg = g$, son conjugué $Co = Ch = h$, CO rayon du cercle $= r$, on aura par la proportion précédente $LK = \frac{rz}{h}$.

Pareillement, à cause des triangles semblables CLl, CGg, on aura $CL . Cl = u :: CG = r . Cg$

$= g$; donc $CL = \frac{ur}{g}$; donc à cause que $CL^2 + LK^2 = rr$ par la propriété du cercle ou du triangle rectangle CLK, on aura $\frac{uurr}{gg} + \frac{rrzz}{hh} = rr$, & $\frac{rrzz}{hh} = rr - \frac{uurr}{gg}$; d'où multipliant par gg, divisant par rr, vient $\frac{gg}{hh} zz = gg - uu$, & $zz = \overline{gg - uu} \times \frac{hh}{gg}$, ou enfin $zz \, . \, gg - uu :: hh \, . \, gg$; ce qui montre que *les quarrés des ordonnées aux diamètres de l'ellipse sont proportionnels aux rectangles de leurs abscisses, & ont même raison que les quarrés des demi-diamètres conjugués ; que leur équation est la même que celle des axes, & que leurs propriétés sont les mêmes dans tout ce qui ne dépend pas du rapport des foyers ; qu'il n'y a d'autre différence, si ce n'est que les ordonnées aux axes leur sont perpendiculaires, & que les ordonnées aux diamètres leur sont obliques.*

58. L'équation à l'ellipse par rapport à ses diamètres, étant $zz = \overline{gg - uu} \times \frac{hh}{gg}$, il s'ensuit (n° 20.) que l'équation à l'hyperbole par rapport à ses diamètres, sera $zz = \overline{uu - gg} \times \frac{hh}{gg}$; c'est-à-dire, que faisant la coupée $Cm = u$, le demi-diamètre $CR = g$, son conjugué $HC = h$, l'abscisse mR sera $u - g$, la grande abscisse en g sera $u + g$, dont le produit est $uu - gg$; & faisant l'ordonnée mA ou $mp = z$, on aura $zz \, . \, uu - gg :: hh \, . \, gg$, c'est-à-dire, comme dans l'ellipse, *le quarré de l'ordonnée au diamètre de l'hyperbole proportionnel au rectangle de ses abscisses*, ou, ce qui est la même chose ici, *au rectangle de la petite abscisse par une ligne composée de cette abscisse & du diamètre.*

Cette propriété peut ſe déduire immédiatement des aſymptotes de l'hyperbole. Car, à cauſe des triangles ſemblables *CRr*, *Cmx* (fig. 5.), on a $CR = g . Rr = CH = h :: Cm = u . mx = \frac{hu}{g}$; donc $Ax = \frac{hu}{g} - Z$, & $AS = \frac{hu}{g} + z$; donc $Ax \times AS = \frac{hhuu}{gg} - zz$.

Or $Ax \times AS = Rr^2 = hh$ (n°s 49 & 50.); donc $hh = \frac{hhuu}{gg} - zz$, & en tranſpoſant, $zz = \frac{hhuu}{gg} - hh = \frac{hhuu - gghh}{gg} = \overline{uu - gg} \times \frac{hh}{gg}$.

59. Si donc on nomme *q* une troiſiéme proportionnelle aux diamètres de l'ellipſe & de l'hyperbole, on aura pour paramètre $q = \frac{2hh}{g}$, & $hh = \frac{qg}{2}$: mettant donc cette valeur de *hh* dans les équations précédentes, on aura $zz = \pm \frac{qg}{2} \mp \frac{quu}{2g}$ pour l'équation au paramètre, lorſque l'on compte les coupées du centre.

Et ſi on les compte du ſommet, la petite abſciſſe ſera *u*, la grande $2g \mp u$, leur produit $2gu \mp uu$; prenant toujours *le ſigne ſupérieur pour l'ellipſe, l'inférieur pour l'hyperbole*, & l'équation aux diamètres ſera $zz = \frac{2hhu}{g} \mp \frac{hhuu}{gg}$; ce qui donnera pour équation au paramètre $zz = qu \mp \frac{quu}{2g}$. D'où l'on tire, en multipliant tout par $2g$, cette propriété commune aux axes, que *le quarré de l'ordonnée aux diamètres de l'ellipſe & de l'hyperbole, eſt au rectangle de ſes abſciſſes, comme le paramètre du premier eſt au premier.*

60. Puiſque la parabole eſt une ellipſe infinie, ſon équation eſt auſſi $zz = qu \mp \frac{quu}{2g}$. Or, à cauſe du dénominateur infini $2g$, le ſecond terme eſt

nul par rapport au premier, & l'équation est simplement $zz = qu$, c'est-à-dire (fig. 3.), que $AD^2 = MO \times q$. Il ne s'agit donc que de déterminer la quantité ou la valeur du paramètre q au diamètre Moo.

Pour cela je remarque que $AR^2 = PM^2 = px = 4AD \times x$; que $RM = AP = x$, que $MO = AT = x$, puisque $PT = 2x$ (n° 40.); donc $RO = 2x$; $Ro^2 = 4xx$; or $AO^2 = \overline{AR^2} + \overline{Ro^2}$; donc $AO^2 = 4AD \times x + 4xx = \overline{4AD + 4x} \times x = qu$; or $4AD$ c'est $4Rn$, $4x$ c'est $4MR$; donc $4AD + 4x = 4Mn = 4MF$, & $x = u$; donc q, ou le paramètre $4Mn = 4MF$; c'est-à-dire, que, comme le paramètre de l'axe est quadruple de la distance du foyer au sommet, ou du sommet à la directrice, *de même le paramètre d'un diamètre quelconque de la parabole est quadruple de la distance de l'origine de ce diamètre à la directrice, ou au foyer de l'axe, & le quarré de l'ordonnée au diamètre, égal au produit de l'abscisse par ce paramètre, & par conséquent proportionnel à l'abscisse.* Donc, en général, *dans toute Section conique, les diamètres ont les mêmes propriétés que les axes dans tout ce qui ne dépend pas de la nature des foyers.*

61. Les diamètres conjugués de l'ellipse & de l'hyperbole sont inégaux entr'eux. Dans l'*ellipse* il n'y en a que deux d'égaux, sçavoir ceux qui aboutissent à des points également éloignés des sommets E & D (fig. 9.); c'est-à-dire, ceux qui répondent aux diamètres du cercle, qui forment avec les axes un angle de 45°. Dans *l'hyperbole équilatère*, les diamètres conjugués sont égaux aussi-bien que les axes.

62. *Dans l'ellipse, si des extrémités M, h, de*

deux diamètres conjugués (fig. 2.) *on mène MP, hQ ordonnées sur le grand axe, le quarré de la coupée CQ, comprise entre le centre C & la rencontre d'une de ces ordonnées, est égal au produit AP × Pa des abscisses de l'autre ordonnée ;* & par conséquent *CQ* moyenne proportionnelle entre ces abscisses.

En conservant la même dénomination pour les axes, faisant $CQ = s$, on aura $AQ = a - s$, & $Qa = a + s$. Faisant $PT = t$, on aura (n° 40.) $tx = aa - xx = AP \times Pa$, & $AQ \times Qa = aa - ss = tx + xx - ss$, à cause de $aa = tx + xx$ par l'équation précédente. A cause des triangles semblables TPM, QCh, on a $TP^2 . QC^2 :: PM^2, hQ^2 :: AP \times Pa . AQ \times Qa :: tx . tx + xx - ss$: donc $t^2 . s^2 :: tx . tx + xx - ss$, & $\frac{t^2}{s^2} = \frac{tx}{tx + xx - ss}$, ou $tssx = t^3 x + t^2 x^2 - t^2 s^2$; & divisant par t, $s^2 x = t^2 x + tx^2 - ts^2$; transposant, $ts^2 + xs^2 = t^2 x + tx^2$; & divisant par $t + x$, viendra $s^2 = tx = aa - xx = AP \times Pa$, & $AP . s = CQ :: CQ . Pa$.

63. Il suit de-là que *la somme des quarrés de deux diamètres conjugués quelconques d'une ellipse est constante & égale à la somme des quarrés des deux axes.* Par la propriété des axes $PM^2 . AP \times Pa = CQ^2 = ss :: bb . aa$; donc $PM^2 = \frac{bbss}{aa}$, & $hQ^2 = bb - \frac{bbss}{aa}$. Or $Ch^2 = hQ^2 + CQ^2$; donc $Ch^2 = ss + bb - \frac{bbss}{aa}$, ou à cause de $ss = aa - xx$, $Ch^2 = aa - xx + bb - \frac{bbss}{aa}$. De plus $CM^2 = CP^2 (= xx) + PM^2$; donc $CM^2 = xx + \frac{bbss}{aa}$, & $CM^2 + Ch^2 = aa + bb$.

64. Au contraire, dans l'hyperbole, *c'est la*

différence des quarrés des diamètres conjugués qui est constante & égale à la différence des quarrés des axes. Car si l'on tire hQ (fig. 5.), elle sera une ordonnée à Aa second axe par rapport à l'hyperbole Bh, & hQ^2 sera (n° 28) proportionnelle à $CQ^2 + Ca^2$, ou faisant $CQ = s$, à $ss + aa$.

De plus on aura, comme dans l'ellipse, les triangles semblables tRO, hCQ, & $tO^2 . QC^2 :: RO^2 . hQ^2 :: AO \times Oa . CQ^2 + CA^2$. Or, dans l'hyperbole (n° 40.) $tx = xx - aa = AO \times Oa$, & $aa = xx - tx$; par conséquent $CQ^2 + CA^2 = aa + ss = xx - tx + ss$, & on aura pour la proportion précédente, $t^2 . s^2 :: tx . xx - tx + ss$; ce qui donne $t^2x^2 - t^3x + t^2 s^2 = s^2tx$, & divisant par t, $s^2x = tx^2 - t^2x + ts^2$, & en transposant, $s^2x - ts^2 = tx^2 - t^2x$, & divisant par $x - t$, $s^2 = tx$, c'est-à-dire, $CQ^2 = AO \times Oa$ comme dans l'ellipse.

Or, par les propriétés des axes, $RO^2 . AO \times Oa = ss :: bb . aa$. Donc $RO^2 = \frac{bbss}{aa}$; $CR^2 = RO^2 + CO^2 (= xx)$; donc $CR^2 + xx + \frac{bbss}{aa}$.

$Ch^2 = CQ^2 (= ss = xx - aa) + hQ^2 (= bb + \frac{bbss}{aa}.)$

Donc $Ch^2 = xx - aa + bb + \frac{bbss}{aa}$; donc $CR^2 - Ch^2 = aa - bb$.

65. *Dans l'ellipse & l'hyperbole, les parallélogrammes faits sous les diamètres conjugués sont égaux aux rectangles faits sous les axes.*

1°. Dans l'ellipse (fig. 9.) joignez les points RO dans le cercle, r, o dans l'ellipse, pour avoir les trapèzes $SROY$, $SroY$, à cause de leurs côtés parallèles RS, OY, rS, oY, on aura $SROY . SroY :: RS . rS$. Or, à cause de la base com-

mune CS, les triangles CRS, CrS ſont comme leurs hauteurs RS, rS; donc $SROY . SroY$: : $CRS . CrS$, & par le même raiſonnement $SROY . SroY$: : $OCY . oCY$; donc ôtant les antécédens des antécédens, les conſéquens des conſéquens, $RCO . rCo :: RS . rS :: AC . aC :: EC . aC$; & multipliant chaque terme de cette dernière raiſon par EC, on a

$RCO . rCo :: EC^2 . EC \times aC$. Or $RCO = \frac{1}{2} EC^2$; donc rCo eſt la moitié de $EC \times aC$, ou des rectangles des demi axes de l'ellipſe; donc, puiſqu'il eſt auſſi la moitié du parallélogramme fait ſous rC, CO, les parallélogrammes des diamètres ſont égaux aux rectangles des axes.

2°. Dans l'hyperbole, puiſque les ordonnées aux aſymptotes ſont réciproques à leurs abſciſſes (n° 54.), on a (fig. 5.) $YR . AK :: CK . CY$; de plus les angles CKA, CYR ſont égaux, & les figures qui autour de leurs angles égaux ont des côtés réciproquement proportionnels, ſont égales: donc le triangle CYR eſt égal au triangle CKA; par la même raiſon $CYH = CKb$; donc $CHR = CAb$. Or CHR eſt la moitié du parallélogramme ſous les demi-diamètres conjugués CR, CH; CAb eſt la moitié du rectangle ſous les demi axes; donc *dans l'hyperbole, comme dans l'ellipſe, les parallélogrammes ſous les diamètres conjugués ſont égaux aux rectangles faits ſous les axes,*

66. Donc, *ſi de l'origine d'un diamètre de l'ellipſe ou de l'hyperbole, on abaiſſe une perpendiculaire ſur ſon conjugué, le rectangle ſous cette perpendiculaire & ce diamètre conjugué, ſera une quantité conſtante, égale au rectangle fait ſous les axes.* Car le rectangle fait de cette perpendicu-

laire & du diamètre ſur lequel elle eſt tirée, eſt égal en ſurface au parallélogramme fait ſous les diamètres, & par conſéquent au rectangle fait ſous les axes ; de manière que nommant q cette perpendiculaire, h le diamètre ſur lequel elle eſt tirée, on aura $hq = ab$.

67. *Dans l'ellipſe & dans l'hyperbole* (fig. 2 & 10.), *tout diamètre* Hh, *parallèle à la tangente* MT, *coupe le rayon vecteur* fM *en un point* S, *tel que* SM *eſt toujours égal à* AC, *moitié du grand axe.*

1°. Si dans l'ellipſe on mene FN parallèle à MT, les angles NMG, FMT ſeront égaux, auſſi bien que leurs alternes MNF, MFN, & le triangle FMN ſera iſocele, & $MN = MF$; de plus, à cauſe des triangles ſemblables fSC, fNF, on aura $fC . fF :: fS . fN$; donc puiſque fF eſt double de fC, fN eſt double de fS, & $fS = SN$, & par conſéquent SN eſt la moitié de la différence de fM à $FM = MN$; donc $SN + NM$ égale à la moitié de la ſomme des rayons fM, FM; donc $SM = AC$.

2°. *Dans l'hyperbole*, que du foyer f on mene fN parallèle à la tangente MT & au diamètre Hh, on aura MN prolongement de FM, égal à fM, & $MI = MS$, à cauſe des triangles iſoceles MNf, MSI; de plus $FI . FN :: FC . Ff$; donc $FI = IN$, & par conſéquent MI, ou ſon égale MS, eſt la moitié de la différence de FM & de $MN = fM$. Or, dans l'hyperbole, la demi-différence de deux rayons menés des foyers au même point de la courbe, eſt égale au demi-axe principal; donc $SM = AC$.

68. Après avoir recherché les propriétés des

Sections coniques par rapport à leurs axes & à leurs diamètres, il ne reste plus qu'à en rechercher la courbure & la surface. On a vu (nº 10.) que la surface de l'ellipse est égale à celle d'un cercle dont le diamètre est moyen proportionnel entre les axes de cette ellipse; d'où il suit que la surface de l'ellipse dépend de la quadrature du cercle.

Il en est de même de la surface de ses secteurs; car si l'on compare (fig. 9.) les deux secteurs COD, CoD, on verra que leurs parties YDO, YDo, qui ne sont que des sommes d'ordonnées proportionnelles, sont entr'elles comme OY, oY, & par conséquent comme AC & aC: de plus leurs autres parties COY, CoY, étant des triangles de même base, sont aussi entr'elles comme leurs hauteurs OY, oY, & par conséquent les secteurs entiers, c'est-à-dire, celui du cercle à celui de l'ellipse, comme AC à aC; donc le secteur circulaire COD étant égal à la moitié du produit de l'arc OD par le rayon $CO = AC$, *la surface du secteur elliptique correspondant est égale à la moitié du produit du même arc circulaire* OD *par le demi-axe* AC; & la quadrature, tant de l'ellipse entiere, que de chacun de ses secteurs, dépend de celle du cercle.

Il en est de même de l'hyperbole, dont l'équation ne differe de celle du cercle, que par un changement de signes, & par le rapport des quarrés de ses axes, qui même ne se trouve pas dans l'hyperbole équilatere; de manière qu'on n'a de l'ellipse, du cercle & de l'hyperbole, que des quadratures approchées.

69. Il en est autrement de la parabole, qui se

quarre immédiatement, & dont *l'espace AMP*, *renfermé entre la courbe, l'abscisse & l'ordonnée, est les* $\frac{2}{3}$ *du produit de l'ordonnée par l'abscisse*, ou ce qui est le même, du rectangle *APMR* (fig. 3).

Car si dans le complément extérieur *ARM* on tire des coordonnées parallèles à l'abscisse, elles seront comme les quarrés des ordonnées correspondantes de la parabole, & leur somme comme la suite des quarrés des nombres naturels 1, 4, 9, 16, &c. dont le dernier ou le plus grand sera proportionnel à *MR*, & le rectangle *APMR* sera composé d'autant de lignes toutes égales à cette plus grande *MR*. Or la somme d'une infinité de quarrés des termes consécutifs de la suite des nombres naturels, est le $\frac{1}{3}$ du produit du plus grand & dernier quarré multiplié par leur nombre, comme on le prouve en arithmétique.

En effet, qu'on compare un cône & un cylindre de même base & de même hauteur, on verra que les élémens du cône sont des cercles qui partant du sommet jusqu'à la base, forment la suite des quarrés des nombres naturels, tandis que les élémens du cylindre forment une suite du même nombre infini de termes tous égaux au plus grand quarré de la première; donc puisque le cône est le $\frac{1}{3}$ du cylindre, la somme infinie des quarrés des nombres naturels, & par conséquent l'espace extérieur de la parabole est le $\frac{1}{3}$ d'autant de termes égaux chacun au plus grand, ou du rectangle *APMR*; donc puisque l'espace intérieur forme avec l'extérieur toute la surface de ce rectangle, *APM* est les $\frac{2}{3}$ de *APMR*.

70. Au contraire, *le paraboloïde formé par la*

révolution de AMP autour de l'axe AP, n'est que la moitié du cylindre formé par la révolution du rectangle APMR autour de son côté AP. Les élémens du cylindre & du paraboloïde sont des cercles qui sont entr'eux comme les quarrés de leurs rayons; ces quarrés sont égaux dans le cylindre; ils sont comme les *yy* dans le paraboloïde, & par conséquent comme les *x*, & vont en décroissant comme ces abscisses, en remontant vers le sommet; ils sont donc comme la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. dont la somme est égale à la moitié de la somme du premier & du dernier, ou à cause que le premier est infiniment petit ou nul par rapport au dernier, à la moitié du plus grand ou du dernier, multiplié par le nombre des termes, & par conséquent le paraboloïde est la moitié du cylindre de même base & de même hauteur.

71. Deux arcs de lignes courbes peuvent se toucher mutuellement, & avoir la même tangente; mais lorsqu'ils s'appliquent l'un sur l'autre en cette manière, ils ne peuvent jamais se confondre parfaitement, à moins que ce ne soient des arcs semblables de figures égales & semblables. Sans cela leur inflexion sous la tangente commune seroit différente, & leur courbure inégale. *La courbure d'une courbe est donc la quantité de son inflexion sous la tangente dans un espace donné.* Cette quantité d'inflexion dépend de deux principes; *de la grandeur de l'angle d'inflexion, & du nombre de ces inflexions sous même grandeur de l'arc.* Plus l'angle du détour est grand, & plus il y a de ces détours, ou ce qui est la même chose, plus les côtés de ces angles sont courts, plus la

courbure eſt grande, laquelle eſt par conſéquent *en raiſon compoſée de l'angle des détours des pas de la courbe & du nombre de ſes pas dans la même étendue d'eſpace*, ou, ce qui eſt le même, en raiſon compoſée *de la directe des angles de ſes détours & de l'inverſe de la grandeur des côtés infiniment petits, qui les forment ou qui les comprennent.*

Les cercles étant des polygones ſemblables & uniformes, ont tous les mêmes angles de détour; mais les côtés qui les forment, ſont dans différens cercles de grandeur différente, & proportionnels à leurs rayons; & par conſéquent *la courbure des cercles eſt en raiſon inverſe de leurs diamètres.*

Dans les courbes différentes, même dans la même courbe différente du cercle, le plus ſouvent les angles des détours & la loi de ces détours varient, & leur courbure n'eſt pas uniforme. Mais comme on peut la varier à l'infini dans les cercles, en augmentant ou diminuant leurs diamètres, l'inflexion ou courbure des cercles ſert à meſurer celle des autres lignes.

Il n'y a qu'une ſeule droite qui puiſſe être tangente au même point d'un arc donné dans une courbe; mais une variété infinie de cercles peuvent la toucher en ce point ſous différens degrés d'attouchement; & comme de toutes les droites que l'on peut mener par un point donné d'une courbe, celle-là ſeule eſt tangente, qui la touche ſi préciſément, qu'on ne peut mener aucune droite entr'elle & la courbe; de même de tous les cercles qui touchent une courbe dans un point donné, celui-là ſeul eſt dit avoir *la même courbure* que l'arc qu'il touche, qui a avec lui un attouchement

si exact, qu'on ne peut décrire aucun cercle en-tr'eux par le point du contact, tous les autres cercles passant en-dessus ou en-dessous. Or c'est ce cercle qui se nomme *cercle de courbure*, *cercle osculateur*; son centre, *centre de courbure*; son demi-diamètre, *rayon de courbure*, *rayon du cercle osculateur*, *rayon de la développée*. Il s'agit donc, pour avoir la courbure de l'arc, de déterminer par l'équation de la courbe le rayon du cercle osculateur, & l'inverse de celui-ci sera la courbure cherchée.

Dans le cercle, le sinus verse d'un arc infiniment petit, est égal au quarré de cet arc divisé par le diamètre; & tel sera par conséquent le sinus verse de l'arc infiniment petit de la courbe dont ce cercle est osculateur.

En effet (fig. 11.) les triangles ABC, ACD étant rectangles en B & C, & ayant les angles BAC, ADC appuyés sur la même corde AC égaux, sont semblables; donc $BC.AC::AC.AD$, & $BC=\frac{AC^2}{AD}$. Or l'arc AC étant infiniment petit, se confond avec sa corde AC; car la différence de la corde & de la tangente dépendant de la grandeur de l'arc interposé, plus cet arc diminuera, plus cette différence sera petite; & l'arc devenant moindre qu'aucune quantité donnée, ou infiniment petit, la différence de la corde & de la tangente sera moindre aussi qu'aucune quantité donnée; & par conséquent l'arc, la tangente & la corde seront alors en raison d'égalité, & *le sinus verse égal au quarré de l'arc divisé par le diamètre*.

72. Dans l'ellipse & dans l'hyperbole, conser-

vant pour les axes & les diamètres les mêmes dénominations que ci-devant (fig. 12 & 13.), on aura $AC = a$, $BC = b$, $CR = Cg = g$. $CH = Ch = h$, le rayon vecteur FR mené du foyer $= r$, RN rayon de courbure au point $R = u$, Rq ou la partie de RN interceptée entre la tangente & le diamètre conjugué $Hh = q$, la perpendiculaire FT abaissée du foyer sur la tangente $= t$, l'ordonnée infiniment petite Lu, Lx, ou $Lz = y$, la ligne $Ru = u$, l'abscisse $Rx = x$, la ligne RD (n° 67.) $= a$, la ligne Rz sinus verse de l'axe LR (n° 71.) $= \frac{yy}{2n}$.

L'on aura *le rayon du cercle osculateur égal à* $\frac{hh}{q}$ ou à $\frac{aabb}{q^3}$, ou à $\frac{bbr^3}{at^3}$, *& sera par conséquent proportionnel à* $\frac{1}{q^3}$, ou à $\frac{r^3}{t^3}$, même à h^3, ou à RE^3.

1°. A cause des triangles semblables Rxz, RCq, on a $x . \frac{yy}{2n} :: g . q$, & $qx = \frac{gyy}{2n}$; d'où l'on tire $n = \frac{gyy}{2qx}$. Or (57 & 58.) $yy . 2gx :: hh . gg$; donc $yy = \frac{2ghhx}{gg} = \frac{2hhx}{g}$; mettant donc cette valeur de yy dans l'équation de n, on aura $n = \frac{2ghhx}{2gqx} = \frac{2hhx}{2qx} = \frac{hh}{q}$.

2°. Puisque $hq = ab$ (n° 65.), $h = \frac{ab}{q}$, & $hh = \frac{aabb}{q^2}$; substituant cette valeur de hh dans l'équation $n = \frac{hh}{q}$, il viendra $n = \frac{aabb}{q^3}$; d'où il suit, à cause de la constante $aabb$, que n sera proportionnel à $\frac{1}{q^3}$.

3°. Les triangles RFT, RDq, donnent $q . a :: t . r$; donc $q = \frac{at}{r}$, & $q^3 = \frac{a^3t^3}{r^3}$; donc divi-

ſant $aabb$ par $\frac{a^3 t^3}{r^3}$, on aura $n = \frac{aabbr^3}{a^3 t^3} = \frac{bbr^3}{at^3}$ $= \frac{1}{2} p \times \frac{r^3}{t^3}$; & à cauſe de la conſtante $\frac{bb}{a}$ ou $\frac{1}{2}$ p, on aura n proportionnel à $\frac{r^3}{t^3}$.

4°. Puiſque $hq = ab$, & que $q = \frac{ab}{h}$, en ſubſtituant cette valeur dans la premiere équation $n = \frac{hh}{q}$, on aura $n = \frac{h^3}{ab}$ proportionnel à h^3.

5°. Or (fig. 2 & 10) ſi du centre C on mene ſur la tangente perpendiculaire CR, les triangles rectangles CRG, EMP ſeront ſemblables, & l'on aura $CR = Mq . CG :: MP = CV . ME$, & $Mq \times ME = CV \times CG$; or $CV \times CG = CB^2$ (n° 41.); donc $Mq \times ME = CB^2$, ou eſt une quantité conſtante; donc ME eſt en raiſon inverſe de Mq, qui lui-même eſt en raiſon inverſe de Ch (n° 66.) donc ME eſt comme Ch; & n proportionnel à h^3, l'eſt auſſi à $ME^3 = RE^3$ (fig. 12).

C'eſt à dire, que *dans l'ellipſe & l'hyperbole le rayon de la développée eſt égal ſéparément ; 1°. au quarré du diamètre conjugué diviſé par la perpendiculaire abaiſſée ſur lui de l'origine du premier diamètre.*

2°. Au produit des quarrés des demi-axes diviſé par le cube de cette perpendiculaire.

3°. A la moitié du paramètre multiplié par le cube du rayon vecteur diviſé par le cube de la perpendiculaire abaiſſée du foyer ſur la tangente ;

Et qu'ainſi il eſt proportionnel, 1°. au cube de la perpendiculaire abaiſſée de l'arc ſur le diamètre conjugué ; 2°. au cube de ce diamètre conjugué ; 3°. au cube du rayon vecteur diviſé par le cube de

la perpendiculaire tirée du foyer d'où part le rayon vecteur sur la tangente ; 4°. *au cube de la normale tirée du point de contact, jusqu'à la rencontre de l'axe.*

73. Soit dans la parabole *ARS* (fig. 14.) la ligne *FA*, menée du foyer au sommet $A = a$, conservant les autres dénominations de l'article précédent, on aura $u = x$, à cause du triangle isocèle uRx ; or, à cause des triangles semblables Rzu, RFT, on aura $u = x . \frac{yy}{2n} :: r . t$ & $n = \frac{ryy}{2tx}$: or $yy = px$, & $p = 4r$ (n° 60.) ; donc $n = \frac{4rrx}{2tx} = \frac{2rr}{t}$; c'est-à-dire, 1°. que *dans la parabole le rayon de la développée est égal à deux fois le quarré du rayon vecteur divisé par la perpendiculaire abaissée du foyer sur la tangente.*

2°. Les triangles rectangles FAT, FTt sont semblables à cause de l'angle commun F ; donc $a . t :: t . Ft$. Or (n° 18.) $Ft = FR = r$; donc $tt = ar$; donc $n = \frac{2rr}{t} \times \frac{ar}{tt} = \frac{2ar^3}{t^3}$; c'est-à-dire, 2°. que *dans cette courbe le rayon de courbure ou de la développée est égal à deux fois le produit de la distance du foyer au sommet par le cube du rayon vecteur divisé par le cube de la perpendiculaire abaissée du foyer sur la tangente ;* & à cause de la constante $2a$, qu'il est proportionnel à $\frac{r^3}{t^3}$.

74. Maintenant pour rechercher si les sections du cône sont les mêmes courbes dont nous venons de détailler les principales propriétés, soit *ABC* (fig. 15 & 16.) un cône droit coupé obliquement par le plan *EIM*, & parallèlement à sa base par le plan *KL*, *MI* ; de manière que *HI* soit la

commune

commune ſection de ces deux plans, on aura, à cauſe des triangles ſemblables *EHL*, *EDH* la, proportion $ED = d. GD = g :: EH = x. HL = \frac{gx}{d}$; & à cauſe des triangles ſemblables *DEF*, *DHK*, on aura $ED = d. EF = f :: DH = d - x$ (fig. 15.) $d + x$ (fig. 16.) $. HK = \frac{fd \mp fx}{d}$. Or, par la propriété du cercle *KIL*, on a $HK \times HL = HI^2 = yy$ quarré de l'ordonnée commune au cercle & à l'autre ſection; donc $yy = \frac{dgfx \mp gfxx}{dd} = \frac{gfx}{d} \mp \frac{gfxx}{dd}$.

Et ſi l'on ſuppoſe que l'axe *ED* ne rencontre point le côté *AD* du cône, mais lui ſoit parallèle, on aura $HK = EF = f$; & alors $HK \times HL = HI^2$, ſera $\frac{fgx}{d} = yy$. Donc ſi dans ces équations on fait le paramètre p égal à la conſtante $\frac{fg}{d}$, on aura dans la ſeconde $yy = px$, qui eſt l'équation à la *parabole*, & dans la première $yy = px \mp \frac{pxx}{d}$, qui eſt l'équation à *l'ellipſe & à l'hyperbole*.

Si donc le plan coupant eſt tellement incliné ſur la baſe du cône, qu'il en rencontre les deux côtés, la ſection ſera une ellipſe (fig. 15.); ce ſera une *parabole*, ſi le plan coupant eſt parallèle à un des côtés du cône; & une *hyperbole* (fig. 16.), ſi le plan coupant eſt moins incliné ſur la baſe du cône, qu'aucun des côtés du cône, auquel cas coupant un de ces côtés, elle ne pourra rencontrer l'autre, & ſera une courbe indéfinie; de manière que ſi le plan coupant étoit prolongé au-delà du ſommet du cône, il iroit couper un autre cône en *D*, oppoſé au premier de la même manière qu'il coupe le premier, & y formeroit une hyperbole oppoſée,

dont l'axe commun feroit *DE*, & le centre le milieu de cette ligne; ce qui donne la grande abſciſſe $= d + x$, au lieu de $d - x$ dans l'ellipſe.

Or il eſt évident que par le point *D* on peut faire paſſer des plans plus ou moins inclinés ſur la baſe du cône, & qui en coupent néanmoins les deux côtés; ce qui donne des ellipſes d'eſpéces différentes, & que par différens points du cône on peut faire paſſer différens plans également inclinés; ce qui donne des ellipſes de différentes grandeurs, mais ſemblables & de la même eſpèce; que la même choſe a lieu pour l'hyperbole; & que le plan coupant qui la produit, moins incliné ſur la baſe que le côté du cône, peut l'être moins en différens degrés, & l'être également ſous différentes grandeurs, ſelon les différens points du cône par leſquels il eſt dirigé; qu'ainſi il n'y a que les paraboles qui également inclinées, ſont toutes de même eſpèce ſous différentes grandeurs, ſelon que le point *E* eſt plus près ou plus loin de *A*; ce qui eſt la propriété des courbes qui ont été décrites par des points de recherche trouvés ſur un plan.



Approb.

APPROBATION
pour la première Edition.

J'Ai lu, par ordre de Monseigneur le Chancelier, les *Institutions Newtoniennes de M. Sigorgne*. Cet Ouvrage, dont l'Auteur s'est servi avec succès dans les Classes de l'Université, m'a paru digne de l'impression, & très propre à répandre le goût de la saine Philosophie. A Paris ce 20 Février 1747. *Signé*, CLAIRAUT.

APPROBATION
du Censeur Royal.

J'AI lu par ordre de Monseigneur le Vice-Chancelier, & approuvé la seconde Edition des *Institutions Newtoniennes* de M. Sigorgne. A Paris ce 17 Septembre 1767.

LA CHAPELLE, *Membre de la Société Royale de Londres.*

PRIVILÉGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos Amés & féaux Conseillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT : notre amé, PIERRE GUILLYN, Libraire, Nous a fait exposer qu'il desireroit faire imprimer & donner au Public : *Les Institutions Newtoniennes*, ou *Introduction à la Philosophie de Newton*, s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilége pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes de faire imprimer ledit Ouvrage autant de fois que bon lui semblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de six années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes. Faisons défenses à tous Imprimeurs, Libraires, &

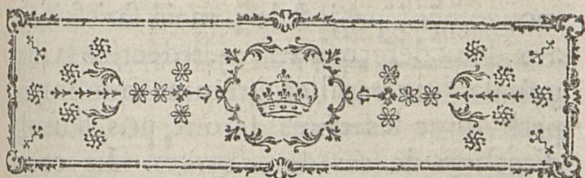
autres Personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'e introduire d'impression étrangère dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi d'imprimer, ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire ledit Ouvrage, ni d'en faire aucun Extrait, sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, & de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts. A la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression dudit Ouvrage sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caractères, conformément aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725, à peine de déchéance du présent Privilege; qu'avant de l'exposer en vente, le manuscrit qui aura servi de copie à l'impression dudit Ouvrage, sera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier de France, le sieur DE LAMOIGNON, & qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle de notredit sieur DE LAMOIGNON, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier, Vice-Chancelier & Garde des Sceaux de France, le Sieur DE MAUPEOU: le tout à peine de nullité des présentes: du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayans causes, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons quà la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers, Secrétaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous Actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires: Car tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le vingt-cinquéme jour du mois de Juillet, l'an de grace mil sept cent soixante-huit, & de notre regne le cinquante-troisiéme. Par le Roi en son Conseil.

Signé, LE BEGUE.

Registré sur le Registre XVII de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, n°. 1600, fol. 489, conformément au Réglement de 1723. A Paris ce 2 Aout 1768.

BRIASSON, Syndic.

INSTITUTIONS



INSTITUTIONS NEWTONIENNES.

CHAPITRE PREMIER.

Du Mouvement curviligne.

1. *Si un corps est animé d'une force uniforme & constante, ou de plusieurs réduites à une seule, & qu'il soit continuellement poussé ou attiré vers un centre par une force accélératrice quelconque, il décrira une ligne courbe que l'on nomme en général* trajectoire; *sa concavité sera tournée vers le centre où tend la force accélératrice, & la courbe sera toute entiere dans le plan mené par le centre des forces, & par la direction de la force projectile.* Car, 1°, puisque le mobile est à chaque instant animé par une force accélératrice dirigée vers un même centre, il ne pourra suivre la direction de son

mouvement projectile ; mais satisfaisant aux deux déterminations, il décrira la diagonale d'un parallélogramme infiniment petit dont les côtés seront pris dans la direction de ces deux forces. Le corps ayant achevé de décrire cette diagonale infiniment petite, fera effort pour continuer sa route dans la même direction; mais il en sera de nouveau détourné par la force centripète dont on le suppose continuellement animé : il descendra donc au-dessous du prolongement de la premiere diagonale qu'il a parcourue, décrira une seconde diagonale infiniment petite inclinée à la premiere par le concours de deux forces, l'une tendant dans la direction de la premiere diagonale parcourue, l'autre accélératrice dirigée vers le centre; & la même chose devant arriver à tout instant, le mobile sera forcé de faire continuellement des détours, de plier à tous momens sa direction précédente, & par conséquent de décrire une courbe.

2°. Le mouvement de projection se trouvant à tous momens replié au-dessous de sa direction, il est évident que la concavité de la courbe sera tournée vers le centre où tend la force accélératrice;

que toutes les petites diagonales inclinées qui composent la courbe, seront toutes dans le même plan que la premiere diagonale, & par conséquent dans un plan mené par le centre des forces & par la direction de la force projectile.

II. *La trajectoire que le mobile décrit, sera plus ou moins courbe, selon que la force accélératrice sera plus ou moins grande par rapport à la force projectile, & selon que la direction de cette force aura moins ou plus d'opposition avec la direction de la force accélératrice, & réciproquement* : Car plus la force de projection sera grande, toutes choses d'ailleurs égales, moins le corps sera détourné de sa direction, & moins l'arc décrit différera de la ligne droite : plus au contraire la force accélératrice sera grande, la force projectile restant la même, plus le mouvement sera infléchi, & la courbe s'éloignera d'autant plus de la tangente.

Pareillement, plus la direction de la force projectile sera opposée à la direction de la force accélératrice, moins celle-ci infléchira le mouvement, toutes choses d'ailleurs égales, & moins par conséquent la trajectoire aura de courbure, & réciproquement. Donc, &c.

Ainſi deux corps animés de la même peſanteur, ne décriront pas pour cela la même courbe, à moins que la force & la direction de leurs mouvemens ſuivant la tangente, ne ſoient auſſi égales, & il n'y a point de courbe qui ne puiſſe être décrite par quelque combinaiſon de ces deux forces.

III. *La ligne décrite ſera un cercle, ſi la force centripète eſt égale à la force centrifuge, & ſi la ligne de projection eſt perpendiculaire ſur le rayon vecteur ; ce ſera une toute autre courbe, ſi l'une de ces deux forces prévaut, ou ſi la ligne de projection n'eſt pas perpendiculaire à la direction de la force accélératrice.*

Dans le premier cas, le mobile ſera autant rapproché du centre par la force centripète, qu'il en ſera éloigné par la force centrifuge; il n'en ſera donc ni rapproché ni éloigné, & les points de ſa courbe ſe trouvant tous à la même diſtance du centre par ce moyen, cette ligne ſera un cercle.

Dans le ſecond cas, le mobile s'éloignera du centre, ſi la force centrifuge eſt la plus forte, & il s'en approchera, ſi la force centripète ou la peſanteur prévaut, & la courbe ſera dès-lors différente

du cercle. Si les forces centrifuge & centripète prévalent tour-à-tour & par degrés, le corps s'approchera & s'éloignera alternativement du centre, & décrira une courbe rentrante, quoique non circulaire. Si l'une des forces l'emporte continuellement sur l'autre, le corps continuera à s'éloigner du centre, s'il a commencé à s'en écarter; il s'en rapprochera au-contraire continuellement, s'il a commencé par s'en rapprocher.

IV. *Quelque courbe qu'un mobile décrive, son rayon vecteur parcourra toujours des aires égales en tems égaux; & en tems inégaux, des aires proportionnelles aux tems: & réciproquement, si un corps décrit autour d'un point, pris dans l'intérieur de la courbe, des aires proportionnelles aux tems, ce sera vers ce point, comme centre, que la force accélératrice sera dirigée.*

Car, 1°, puisque le corps poussé dans la direction Ax, (*fig.* 17) parcourt d'abord AB, & qu'au moment suivant la force centripète, dirigée vers le point S, lui fait parcourir Bc dans le même tems qu'il auroit parcouru $BC = AB$, il est évident que le rayon vecteur AS décrira à ce premier instant l'aire ou le triangle ASB, & que dans un tems égal à ce premier

moment, il décrira le triangle BSc: or $BSc = ASB$. On ſait d'abord que $BSC = ASB$, à cauſe de $BC = AB$, par l'hypothéſe, & de la hauteur commune AS : or, $BSc = BSC$, à cauſe de la baſe commune BS & de Cc, parallele à BS; donc $BSc = ASB$, & les aires décrites en tems égaux ſont égales.

Elles ſont doubles, triples, &c. dans des tems doubles, triples &c. par cela même qu'elles ſont égales en tems égaux. Donc en général les aires décrites par le rayon vecteur, d'un corps qui décrit une courbe, en vertu d'une force tendante à un même point, ſont toujours proportionnelles aux temps que le mobile met à les parcourir.

2°. Puiſque BSc n'eſt égal à ASB que parce que Cc eſt parallele au rayon BS, & que Cc, par la propriété du mouvement composé, doit auſſi être parallele à la direction de la force, qui agiſſant en B, force le corps à décrire la diagonale Bc, il faut que cette force ſoit dirigée ſelon le rayon BS, & l'on démontrera la même choſe des aires ſuivantes. Donc un corps qui décrit des aires proportionnelles aux temps, autour d'un

point pris dans l'intérieur de la courbe qu'il parcourt, a nécessairement sa force centripète dirigée vers ce point.

V. Puisque les aires décrites par le rayon vecteur sont égales en tems égaux, le tems de la révolution entiere sera d'autant plus long, que l'aire de l'orbe entier sera plus grande, & que le corps en décrira une plus petite partie dans un tems donné ; donc si un corps animé d'une force centripète, décrit un orbe entier ; *le temps de sa révolution périodique sera en raison composée de la directe de la surface entiere de l'orbe, & de l'inverse de l'aire d'un secteur quelconque de cet orbe décrit en tems donné.*

VI. Par la même raison, *les vîtesses de ce corps sur chaque point de la courbe qu'il décrit, seront réciproquement, comme les perpendiculaires, menées du centre des forces sur la droite qui touche la courbe au point où est le corps* : Car les bases *AB*, *Bc* des triangles *ASB*, *BSc*, expriment les vîtesses du mobile aux points *A* & *B* ; or, ces triangles étant égaux en tems égaux, leurs bases *AB*, *Bc* sont réciproquement comme leurs hauteurs, & par conséquent ici réciproquement comme les perpendiculaires tirées du

centre des forces *S* ſur ces baſes prolongées, s'il eſt néceſſaire ; c'eſt à-dire, ſur les tangentes de la courbe aux points *A* & *B*, où ſe trouve le corps. Par le rapport de ces vîteſſes les aires regagnent en largeur proche le centre ce qu'elles perdent alors en hauteur, & c'eſt ce qui fait l'égalité des aires.

VII. *Dans le cercle*, les perpendiculaires tirées du centre ſur les tangentes ſont toutes égales ; donc il n'y a point d'augmentation de vîteſſe dans le cercle lorſque la force accélératrice y tend au centre, *& il eſt parcouru d'un mouvement uniforme.* Ce n'eſt pas la même choſe dans les autres courbes, où ces perpendiculaires ſont à tous momens inégales.

En général, *la vîteſſe d'un corps qui décrit une courbe, eſt accélérée quand le rayon vecteur fait un angle aigu avec la force tangentielle ou projectile*, retardée *quand cet angle eſt obtus*, uniforme & toujours la même, *quand l'angle formé par ces deux forces eſt un angle droit.* Si ayant conſtruit le rectangle *aK* (*fig.* 18.) on décrit du point *a*, comme centre, l'arc *Ki*, il paroîtra d'abord que la diagonale *a K*, parcourue par l'action conjointe des deux forces *ab*, *ag*, ſera plus longue que *ab*,

& qu'il y aura, dans le cas même de l'angle droit, une augmentation continuelle de vîtesse; mais si l'on considere alors que les angles *b* & *i* sont droits, l'on verra que l'angle *b K i* est infiniment petit, & par conséquent *bi* infiniment petit par rapport à *bK*; or, *bK* qui exprime ici l'action instantanée de la pesanteur est lui-même infiniment petit par rapport à *ab*, qui exprime la vîtesse finie du corps; donc *bi*, qui exprime l'augmentation de vîtesse, n'est qu'un infiniment petit du second genre par rapport à cette vîtesse; & continuellement répété dans une révolution, ou même dans le tems fini le plus long, il ne donne qu'un accroissement de vîtesse infiniment petit du premier ordre que l'on doit négliger.

Mais si l'angle *g a b*, (*fig.* 19) est aigu, l'angle *i* l'est aussi bien que l'angle *b*, & *ib* & *b K* sont du même genre, chacun infiniment petit du premier ordre; par conséquent l'accroissement *i b* donne, au bout d'un tems fini, une augmentation finie de vîtesse.

Si *g a b* est obtus (*fig.* 20.) la diagonale *a K* est moindre que *ab* de la quantité *bi*, qui, étant du même genre que *b K*,

donne une retardation finie dans un tems fini.

VIII. *Quelle que ſoit la loi de la force centripète ou ſon intenſité, la proportionnalité des aires aux tems n'en ſera point troublée; mais il n'en ſeroit pas de même de la force projectile : on ne pourroit l'altérer par une force étrangere, que la proportionnalité des aires n'en fût détruite.*

Car 1°. (*fig. 21.*) ſi l'on mene *cCCK*, parallele à *BS*, tous les triangles faits ſur la baſe *BS*, & dont les ſommets aboutiſſent à la ligne *cK*, ſeront égaux chacun à chacun, & au triangle *BSc*, puiſqu'ils auront la même baſe *BS*, & ſeront entre paralleles. Qu'on altére donc comme on voudra, la force centripète *BN*, qu'on lui ajoute *LN*, *NQ* dans la même direction, les triangles *BSc*, *BSC* ſeront toujours égaux chacun en particulier au triangle *ASB*; & pourvu que la peſanteur agiſſe toujours dans la direction du rayon vecteur, quelle que ſoit ſa variation & ſa premiere intenſité, la proportionnalité des aires aux tems n'en ſera pas détruite.

2°. Mais ſi par une cauſe étrangere on vient à augmenter ou à diminuer le mouvement en long, plus qu'il ne doit l'être

par la combinaiſon ſeule & la direction des deux forces, les ſommets des triangles que l'on formeroit ſur la baſe *B S*, ou paſſeroient au-delà de *c C K*, ou n'aboutiroient point juſqu'à cette ligne; & la hauteur de ces triangles n'étant plus égale à celle de *B S c*, ces triangles ne ſeroient plus égaux en tems égaux, ni par conſéquent à *A S B*; ce qui détruiroit la loi de *Képler* ou la proportionnalité des aires.

CHAPITRE II.

Du mouvement dans le Cercle.

IX. S*i la courbe décrite eſt un Cercle, & que la force accélératrice ſoit dirigée vers le centre, cette force, & conſéquemment la force centrifuge qui lui eſt égale*, (nº. 3.) *ſera égale au quarré de la vîteſſe du mobile diviſé par le diamétre du Cercle.*

Dans le Cercle, la force centripète eſt toujours meſurée par le ſinus verſe de l'arc décrit; puiſque ce ſinus marque de combien le corps a été précipité au-deſſous de la tangente. Ce ſinus exprime

aussi la force centrifuge, puisqu'il exprime la quantité dont la force tangentielle tend à éloigner le corps du centre : or (*Sect. con. n°. 71.*) le sinus verse d'un arc de cercle infiniment petit, est égal au quarré de son arc divisé par le diamétre ; donc l'arc décrit exprimant ici la vîtesse, la force centripète, ou centrifuge, est dans cette courbe égale au quarré de la vîtesse, divisé par le diamètre, & par conséquent *proportionnelle au quarré de cette vîtesse divisé par le rayon du Cercle.*

En effet, plus la vîtesse est grande, plus il faut d'action dans la pesanteur pour l'infléchir d'une quantité donnée. Pareillement, plus la vîtesse est grande, plus grand est l'arc parcouru ou le nombre des détours, & par conséquent plus grande est la somme des impressions de la pesanteur, laquelle agit à chaque détour; donc en composant ces raisons, la force centripète est dans le Cercle comme le redoublement ou comme le quarré de la vîtesse.

Mais plus le Cercle est grand, moins le corps fait de détours sous même vîtesse ou sous une vîtesse donnée, & par conséquent moindre est la somme des impressions de la pesanteur qui n'agit qu'à

chaque détour ; donc la ſomme de ces impreſſions, toutes choſes d'ailleurs égales, eſt en raiſon inverſe de la grandeur du cercle, ou de ſon diamètre; donc en totalité, la force centripète ou centrifuge d'un corps qui décrit un cercle, eſt comme *le quarré de ſa vîteſſe directement, & comme le diamètre du Cercle décrit réciproquement.*

X. Soit donc u la vîteſſe, r le rayon du cercle, p la force centripète, on aura $p = \frac{uu}{2r}$, $uu = 2rp$, & $u = \sqrt{2rp}$: or $\sqrt{2rp}$ eſt la vîteſſe qu'acquerroit un corps qui tomberoit librement, & d'un mouvement accéléré, le long de la moitié du rayon du cercle en vertu de la peſanteur p.

D'une part, dans le mouvement uniformément accéléré, l'eſpace parcouru eſt en raiſon compoſée de la force de peſanteur qui anime le corps, & du quarré du tems qu'il met à le parcourir, & par conſéquent $\frac{1}{2}r = ptt$.

De l'autre la vîteſſe u acquiſe au bout du tems t, ou de l'eſpace $\frac{1}{2}r$, ſeroit capable de faire parcourir uniformément un eſpace double dans le même temps; donc $u = \frac{r}{t}$ & mettant à la place de r, ſon égale $2ptt$, on aura $u = 2pt$, & $t = \frac{u}{2p}$,

ce qui donne $tt = \frac{uu}{4pp}$; donc ſubſtituant cette valeur de tt, dans la premiere équation $\frac{1}{2} r = ptt$, on aura $\frac{1}{2} r = \frac{puu}{4pp} = \frac{uu}{4p}$, & multipliant tout par $4p$, on aura $uu = 2pr$, & $u = \sqrt{2pr}$, comme dans le Cercle.

Donc *la vîteſſe d'un corps qui décrit uniformément une circonférence de Cercle par une force dirigée au centre, eſt égale à celle qu'il acquerroit en tombant librement en vertu de la peſanteur qui le retient dans le Cercle, & parcourant d'un mouvement uniformément accéléré la moitié du rayon du Cercle qu'il décrit.*

XI. Il ſuit de là, *que le temps employé à parcourir la circonférence entiere, eſt au tems qu'employeroit le corps à deſcendre par ſa peſanteur le long de la moitié du rayon, comme la circonférence eſt au rayon* : car dans le tems que le demi-rayon eſt parcouru par un mouvement uniformément accéléré, le corps parcourroit le rayon entier, ſi dès-le commencement de ſa chûte il ſe mouvoit uniformément avec la vîteſſe acquiſe au bout de la moitié du rayon, & alors les vîteſſes étant égales dans le cercle & dans le rayon, les tems ſeroient comme les eſpaces qui ſont ici la circonférence & le rayon. Donc, &c.

XII. Or M. *Huygens* a démontré que le tems d'une vibration quelconque dans une Cicloïde, est au tems de la chûte libre du pendule le long de sa demi-longueur, comme la circonférence d'un cercle est à son rayon ; & par conséquent *l'oscillation du pendule dans une Cicloïde ou dans un très-petit arc de Cercle, est deux fois plus prompte que la révolution d'un corps dans la circonférence du cercle, dont la longueur du pendule est le rayon.*

XIII. Il s'infére de là, qu'afin que les corps posés sur la surface de la terre eussent une force centrifuge égale à leur poids, & cessassent de presser la terre ; il faudroit que *leur mouvement fût dix-sept fois plus rapide qu'il ne l'est, ou que n'est celui de la terre sur son centre.*

On sait que les longueurs des pendules sont en raison doublée des tems qu'ils mettent à faire une vibration ; Prenant donc un pendule d'une seconde, dont la longueur est de 3 pieds 8 lignes $\frac{1}{2}$, ou de 440 $\frac{1}{2}$ lignes, & imaginant un autre pendule de la longueur du semi-diamètre de la terre, qui est de 20541600 pieds, ou de 2957990400 lignes, dites : comme 440 $\frac{1}{2}$ lignes sont au quarré d'une seconde $= 1''$, ainsi 2957990400 est à $x =$

6880519″, qui eſt à très-peu près le quarré de 2623″; donc un pendule de la longueur du demi diamètre de la terre, feroit une vibration en 2623″; & par conſéquent pour que les corps qui nous entourent ne preſſaſſent point la terre, il faudroit que leur circulation, ou celle de la terre, s'achevât dans un temps double, ou dans 5246″: or, la terre fait ſa révolution journaliére en 1440′, ou en 86400″; ce qui eſt un peu plus de dix-ſept fois plus lent que 5246″. Donc, &c.

XIV. Il ſuit de là, que la *peſanteur des corps ſur la ſurface de la terre, eſt environ 289 fois plus grande que leur force centrifuge:* car le cercle étant le même, les forces centrifuges ſont comme les quarrés des vîteſſes. Or, faiſant la vîteſſe actuelle de la terre = 1, cette vîteſſe ſeroit 17 ſi la terre avoit la vîteſſe requiſe pour que la force centrifuge des corps qui nous entourent, égalât leur poids: donc leur force centrifuge actuelle eſt à leur peſanteur, :: $1^2 . \overline{17}^2$, ou comme 1 à 289 quarré de 17.

XV. *Si des corps ſe meuvent dans des cercles différens, & que leurs révolutions ſe faſſent en tems égaux, leurs vîteſſes, leurs forces centrifuges, ou centripètes, ſeront*

ſéparément

ſéparément, comme leurs diſtances, au centre, ou comme les rayons des cercles; car les vîteſſes étant uniformes dans le cercle, elles ſont comme les eſpaces que l'on ſuppoſe ici parcourus en temps égaux, & par conſéquent comme les circonférences qu'elles parcourent, ou comme leurs rayons; donc alors $\frac{uu}{r} = \frac{rr}{r} = r$.

XVI. C'eſt le cas des différents points d'une ſurface de ſphère qui tourne ſur ſon centre; ainſi tous les points de la ſurface de la terre, faiſant leur révolution en même-tems, leurs forces centrifuges ou centripètes ſont comme les rayons des cercles paralleles qu'ils décrivent, ou comme leurs diſtances à l'axe.

XVII. Si les vîteſſes ſont égales, & que les tems périodiques ſoient en conſéquence comme les eſpaces, ou comme les rayons des cercles parcourus; la force centrale $\frac{uu}{r}$ ſera en raiſon inverſe de r, à cauſe de la donnée uu; & par conſéquent auſſi en raiſon inverſe du tems périodique.

XVIII. Mais *ſi les vîteſſes ſont en raiſon inverſe des rayons ou des diſtances au centre, les forces centrales ſeront en raiſon renverſée des cubes des diſtances* : car

alors $u = \frac{1}{r}$, & $uu = \frac{1}{rr}$; donc la force centrale $\frac{uu}{r} = \frac{1}{r^3}$.

XIX. *Si les forces centrales ſont en raiſon renverſée des quarrés des diſtances, les vîteſſes ſeront en raiſon inverſe des racines des diſtances, & les quarrés des tems périodiques directement comme les cubes des mêmes diſtances :*

Car 1°. on aura alors $\frac{uu}{r} = \frac{1}{rr}$, & par conſéquent $uu = \frac{1}{rr} = \frac{1}{r}$; donc $u = \sqrt{\frac{1}{r}}$.

2°. Les tems étant comme les eſpaces diviſés par les vîteſſes, $t = \frac{r}{u}$, & $tt = \frac{rr}{uu}$; or $uu = \frac{1}{r}$; donc $t^2 = r^2$ diviſé par $\frac{1}{r} = r^3$; donc $t = r^{\frac{3}{2}}$, c'eſt-à-dire, croît dans un rapport moyen entre la diſtance & le quarré de cette diſtance.

XX. Réciproquement, *ſi les quarrés des tems périodiques ſont comme les cubes des diſtances, les forces centripètes ſeront en raiſon doublée inverſe des diſtances.* Car $t = \frac{r}{u}$, donc ſi $t^2 = r^3$, on aura $\frac{r^2}{u^2} = r^3$, & $u^2 = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}$, & par conſéquent $\frac{uu}{r} = \frac{1}{rr}$.



CHAPITRE III.

Du mouvement dans les Sections coniques.

XXI. *LA force centripète d'un corps qui parcourt une courbe quelconque, comme A R S (fig. 14.), en pesant toujours vers un point déterminé F, est en raison composée de la directe du rayon vecteur, & de l'inverse du rayon de la développée ou du cercle osculateur multiplié par le cube de la perpendiculaire menée du centre des forces sur la tangente au point de la courbe où se trouve actuellement le corps*; c'est-à-dire, que nommant r le rayon vecteur FR, t la perpendiculaire FT, n le rayon RN du cercle osculateur, la pesanteur $p = Ru$ sera par toute la courbe comme $\frac{r}{t^3n}$. Soit le corps au point R, sa vîtesse RL sera proportionnelle à $\frac{1}{t}$ (n°. 6.), & la force centripète Rz, par rapport au point N, centre du cercle osculateur, sera $\frac{1}{2ttn}$ (n°. 9.); or à cause des triangles uRz, RFT, on aura $Rz = \frac{1}{2ttn}$, Ru

:: $t\, r$; Donc $R\, u = \frac{r}{2t^3 n}$, & eſt par conſéquent proportionnelle à $\frac{r}{t^3 n}$.

XXII. Il ſuit de là-*qu'un corps qui décrit une ſpirale logarithmique, eſt animé d'une peſanteur proportionnelle aux cubes des diſtances réciproques.* On appelle ſpirale logarithmique, ou ſpirale acquiangle, celle qui dans tous ſes points eſt coupée ſous un même angle par ſes rayons vecteurs ; d'où il ſuit que tous les triangles formés par ces rayons vecteurs r, par les tangentes & par les perpendiculaires t ſur ces tangentes, ſont ſemblables, & qu'ainſi r, t ont par-tout dans cette courbe les mêmes rapports entr'elles. De plus, les tangentes croiſſant auſſi, ou décroiſſant comme les rayons r, ou comme les perpendiculaires t, il faut que les côtés infiniment petits de la courbe, & conſéquemment ceux du cercle oſculateur croiſſent ou décroiſſent à proportion ; & qu'ainſi le rayon n de ce cercle y ſoit toujours proportionnel aux lignes r, t. D'où il ſuit que l'expreſſion $\frac{r}{t^3 n}$ de la force centripète ſe change dans cette courbe dans l'expreſſion $\frac{r}{r^3 r} = \frac{1}{r^3}$.

En effet, puiſque r dans cette courbe eſt proportionnelle à t, la viteſſe qui dans

toute courbe eſt proportionnelle à $\frac{1}{t}$ (*n.* 16.) ſera ici proportionnelle à $\frac{1}{r}$; c'eſt-à-dire, en raiſon inverſe des diſtances au pôle ou centre de la ſpirale : or, quand $P = \frac{1}{r^3}$, la vîteſſe dans les cercles qui répondent aux différentes hauteurs, ou ce qui eſt le même, aux différents points de la courbe, ſont comme dans la courbe en raiſon de $\frac{1}{r}$ (*n*°. 18.) ; & par conſéquent dans l'hypothèſe de peſanteur $P = \frac{1}{r^3}$; ſi la vîteſſe dans la courbe a commencé par être moindre que la vîteſſe néceſſaire pour décrire un cercle, elle continuera toujours d'être moindre que celle des cercles correſpondans dans toutes ſes différentes hauteurs, & le corps continuant de s'approcher du centre, décrira une *ſpirale* ; il continuera de s'éloigner du centre par la même raiſon, ſi la vîteſſe dans la même hypothèſe $P = \frac{1}{r^3}$ a été dans un ſeul point de la courbe plus grande que celle qui eſt néceſſaire pour décrire un cercle à cette diſtance; donc pour que la ſpirale dont il s'agit, ſoit décrite, il faut que la peſanteur varie dans la raiſon inverſe des cubes des diſtances.

XXIII. Dans la ſpirale *hyperbolique*, ou ſpirale inverſe d'*Archimède*, le rayon vecteur eſt toujours en raiſon inverſe des

circulations ; donc la vîteſſe dans cette courbe eſt toujours en raiſon de $\frac{1}{r}$; donc par le raiſonnement précédent, ſi $P = \frac{1}{r^3}$ & que le corps ait commencé à s'approcher du centre, il ne ceſſera de s'en approcher ; & s'il a commencé par s'en éloigner, il le fera continuellement, & pourra également décrire une ſpirale *hyperbolique* qu'une ſpirale *logarithmique*. La force centripète dans ces deux courbes, ſuit donc la raiſon triplée inverſe des diſtances, & ce ſera la différence de direction dans la vîteſſe de projection, qui déterminera le mobile à décrire l'une ou l'autre de ces courbes.

XXIV. Si la courbe décrite eſt une ellipſe $A\ B\ a\ b$ (*fig.* 12), & que le point où tendent les forces centripètes, ſoit le centre de l'ellipſe, *ces forces dans tous les points de l'ellipſe ſeront entr'elles directement comme les diſtances au centre, ou comme les rayons vecteurs ;* car, nommant q la ligne $R\ q$; n le rayon de la développée, ou du cercle de courbure, étant proportionnel à $\frac{1}{q^3}$ (*Sect. con.* n°. 72), t, ou la perpendiculaire abaiſſée du centre ſur la tangente $R\ T$, étant ici égale à q, l'expreſſion $\frac{r}{t^3 n}$ devient $\frac{r}{q^3}$ diviſé par $\frac{1}{q^3} = \frac{rq^3}{q^3} = r$.

Cette vérité ſera ſenſible ſi l'on conſidère les cas extrêmes. Soit *A C* à *B C* comme 2 à 1, la vîteſſe en *A* ſera à la vîteſſe en *B* comme 1 à 2. Et dans le même tems le corps parcourra en *B* un arc double de l'arc parcouru en *A*. Si donc l'ellipſe avoit la même courbure en *A* & *B*, la force centripète en *B* ſeroit quadruple de la force centripète en *A* dans le même temps (*Sect. con. n.* 71.); mais (*Ibid. n.* 72.) la courbure en *B* ſe trouve dans ce cas huit fois moindre qu'en *A*; donc la force centripète n'y eſt que $\frac{4}{8}$ ou $\frac{1}{2}$ de ce qu'elle eſt en *A*, & préciſément dans le rapport direct des diſtances.

XXV. Que le foyer de cette ellipſe reſtât fixe, & que le centre s'en éloignât à l'infini, l'ellipſe deviendroit *parabole*, & il ne ſe feroit point de changement dans la loi de la force centripète dirigée au centre. Une parabole ſeroit donc décrite avec une force proportionnelle à la diſtance au centre, ce qui revient au théoreme de *Galilée* : car ce centre étant alors à une diſtance infinie, les diſtances différentes où le corps peut parvenir ſont ſenſées égales, & ne different que de certaines quantités finies, infiniment petites par rapport à la diſtance du

centre ; d'où il ſuit que la peſanteur doit être regardée comme conſtante, & comme ayant dans ce cas toutes ſes directions parallèles, ainſi que le ſuppoſoit *Galilée*.

Si l'on continue d'éloigner davantage le centre, la loi de gravitation demeurera la même, le ſommet éloigné de l'ellipſe viendra comme s'adoſſer contre ſon premier ſommet, & la parabole ſera changée en hyperbole ; de façon que la force centrale qui animera le corps, ſera, par rapport au centre de cette courbe, une vraie force centrifuge.

XXVI. *Si la courbe décrite eſt pareillement une Section conique, & que la force centrale ſoit dirigée vers le foyer, elle ſuivra dans les différents points de la courbe, la raiſon renverſée des quarrés des diſtances à ce foyer* : car alors on aura *n* proportionnel à $\frac{r^3}{t^3}$ (*Sect. con. n.* 72.) ; donc l'expreſſion de la force centripète $\frac{r}{t^3 n}$ ſera $\frac{r}{t^3}$ diviſée par $\frac{r^3}{t^3} = \frac{rt^3}{r^3 t^3} = \frac{r}{r^3} = \frac{1}{rr}$. *

* Il ne faut point être ſurpris que la même loi n'ait pas lieu quand la force tend au centre & au foyer. Dans toute courbe & en tous cas les vîteſſes ſont en raiſon inverſe des perpendiculaires abaiſſées du centre des forces ſur les tangentes ; or, ces perpendiculaires ſont différentes lorſqu'on les tire du centre ou du foyer ; donc ſur le même point de la courbe les vîteſſes ſont différentes en ces deux

XXVII. Ainſi il ne faut qu'une force centripète, diminuant en raiſon inverſe du quarré de la diſtance au foyer, pour qu'un corps, une fois projetté avec une vîteſſe convenable, décrive perpétuellement une Section conique, en peſant continuellement ſur un point déterminé qui en ſera le foyer. Il eſt en effet évident que les forces projectile & centripète peuvent être tellement combinées dans leurs directions & leurs intenſités, que le mouvement commencera dans un arc d'ellipſe, par exemple : or une ellipſe commencée doit continuer à être décrite, quand la peſanteur qui anime le mobile, varie dans la raiſon doublée inverſe de la diſtance au foyer : car après avoir parcouru ce commencement d'ellipſe, le corps tendra à s'échapper par la tangente par ſa force de projection, & par ſa force de peſanteur il ſera chaſſé au-deſſous de cette tangente, de toute la quantité d'un

cas : or, deux corps ne peuvent décrire le même arc avec différentes vîteſſes, à moins que la force centripète ne ſoit différente ; donc il faut que cette force varie ſelon différentes loix dans ces deux cas, & il ſeroit facile de déduire, avec Newton, la loi réciproque des quarrés pour le foyer, immédiatement de la loi des diſtances directes pour le centre. Il ſuffit ici de les avoir toutes deux déduites de la même formule.

eſpace, qui ſera par l'hypothèſe en raiſon inverſe du quarré du rayon vecteur : or, dans l'ellipſe & les autres Sections coniques, ces ſortes d'eſpaces entre la tangente & la courbe, dans des arcs proportionnels aux vîteſſes, ſont en raiſon inverſe des quarrés des rayons vecteurs, comme on vient de le démontrer ; donc le mobile ſera retenu par ſa peſanteur ſur la périphérie de la courbe qu'il aura commencé de décrire, & ce ſera la différence des vîteſſes avec leſquelles il aura été projetté, qui déterminera la courbe à être cercle, ellipſe, parabole ou hyperbole.

Soit *A F* à *a F* (*fig.* 12), comme 3 à 1, la vîteſſe en *a* (*n.* 6.) ſera triple de la vîteſſe en *A*, & l'arc décrit en *a* ſera triple auſſi dans le même tems ; puis donc que la courbure eſt la même en *A* & *a*, le nombre des détours ſera triple en *a* dans le même tems, & la force centripète d'autant plus grande ; elle ſera triple encore à raiſon de la vîteſſe triple ; autrement le corps ne pourroit être ramené ſur la circonférence de l'ellipſe ; donc en tout la peſanteur en *a* devra être neuf fois plus grande qu'en *A*, pour que le corps n'abandonne pas l'ellipſe ; & cette courbe ne peut être décrite par une force

tendante au foyer, à moins que cette force ne varie dans le rapport renversé des quarrés des distances Il. s'agit maintenant d'en rechercher, non simplement les rapports, mais la quantité absolue.

XXVIII. *Que du point L (fig. 12, 13 & 14.) on abaisse sur le rayon FR la perpendiculaire LK, la pesanteur absolue du mobile au point R, pris à volonté sur chacune des Sections coniques, sera égale au quarré de cette perpendiculaire divisée par le paramètre L de la Section.*

Nommant k cette perpendiculaire, & conservant pour les autres lignes les mêmes expressions qu'au n°. 72. des Sect. con., les triangles semblables uRz, uLk donneront $u \frac{yy}{2n} :: y\ k$; donc $u = \frac{y^3}{2kn}$; de plus les triangles semblables RFT, Luk donnent $r\ t :: y\ k$; donc $\frac{r}{t} = \frac{y}{k}$, & $\frac{r^3}{t^3} = \frac{y^3}{k^3}$.

Or, si la Section est une ellipse ou une hyperbole, on aura (*Sect. con. n°.* 72) $n = \frac{bbr^3}{at^3} = \frac{bby^3}{ak^3}$, & mettant cette derniere valeur de n dans $u = \frac{y^3}{2kn}$, on aura $u = \frac{ak^3y^3}{2bbky^3} = \frac{ak^2}{2bb}$, ce qui est le quarré de LK divisé par le paramètre $L = \frac{2bb}{a}$, d'où il suit que la pesanteur u ou $Ru = \frac{kk}{L}$.

Mais ſi la Section eſt une parabole, comme on aura (*Sect. con. n.* 73.) $n = \frac{2rr}{t}$, on aura $\frac{y^3}{2kn} = \frac{ty^3}{4krr}$: or, à cauſe de y $k :: rt$, $y^3 = \frac{k^3r^3}{t^3}$; donc $\frac{ty^3}{4krr}$ devient $\frac{kkr}{4tt}$; de plus $tt = ar$ (*Sect. con. n.* 73.) donc $u = \frac{kk}{4a} = \frac{kk}{L}$.

XXIX. De cette propoſition qui exprime la quantité abſolue de la peſanteur, on eût pû déduire la précédente, qui en exprime le rapport. Car puiſque les aires parcourues en tems égaux ſont égales, il faut que les perpendiculaires L K, qui expriment les hauteurs des aires, ſoient en raiſon renverſée des rayons vecteurs qui en ſont les baſes ; donc $k = \frac{1}{r}$, & $kk = \frac{1}{rr}$; donc la peſanteur $u = \frac{kk}{L}$ eſt à cauſe de la conſtante L dans chaque Section conique ſéparément dans la raiſon de $\frac{1}{rr}$.

XXX. *Dans toute Section conique décrite par une force centrale qui tend au foyer, les aires des ſecteurs décrits en même tems, ſont dans ces courbes comparées, comme les racines des paramètres des grands axes de chaque courbe.*

Car puiſque $u = \frac{kk}{L}$, on a $u \times L = kk$, & parceque $u = \frac{1}{rr}$ on a $\frac{L}{rr} = kk$,

ou $L = kk \times rr$. Or $k \times r =$ l'aire du triangle ou ſecteur *FRL*; donc cette aire eſt comme $\sqrt{L}$.

XXXI. *Donc dans l'ellipſe, l'aire entière eſt comme* $\sqrt{L} \times$ *par le tems entier de la révolution.* Ce tems (*n*°. 5.) eſt comme l'aire entière diviſée par l'aire d'un ſecteur décrit en tems donné; donc ce temps multiplié par l'aire du ſecteur décrit en tems donné égale l'aire entière: donc en nommant *T* le tems, l'aire entière eſt comme $T \times \sqrt{L}$.

XXXII. Or (*Sect. con. n. 10.*) l'aire entiere de l'ellipſe eſt comme le produit du grand axe par le petit; donc dans cette courbe $a \times b = T \times \sqrt{L}$.

XXXIII. *Dans les ellipſes qui ont un foyer, comme vers lequel ſe dirige la force centripète, les tems périodiques ſont comme les racines quarrées des cubes des grands axes de ces ellipſes:* car par la définition du paramètre $a\ b :: b\ L$, & $a \times L = b^2$; donc multipliant le tout par a_2, on a $a^3 \times L = a^2 \times b$: or $a \times b = T \times \sqrt{L}$ (*n*°. *précéd.*); donc $a^2 \times b^2 = T^2 \times L$, & $a^3 \times L = T^2 \times L$; donc $a_3 = T^2$ ou $T = a^{\frac{3}{2}}$.

XXXIV. Dans l'ellipſe, la moyenne diſtance du foyer eſt la moitié du grand

axe (*Sect. con. n.* 12.); donc dans des ellipses qui ont un foyer commun, *les tems des révolutions sont comme les racines des cubes des distances moyennes*; c'est une des loix que *Képler* a observées dans le mouvement des planettes autour du Soleil.

XXXV. *Dans toute Section conique, la vîtesse du corps qui la parcourt en vertu d'une force dirigée au foyer, est comme la racine du paramètre du grand axe, divisée par la perpendiculaire tirée du foyer sur la tangente du point où est le corps.*

La vîtesse est comme l'arc RL, décrit dans un tems donné & infiniment petit: or à cause des triangles semblables RLK, RFT, $t\ r :: k\ RL = \frac{kr}{t}$; donc puisque $kr = \sqrt{L}$ (*n°*. 30.), RL ou $V = \frac{\sqrt{L}}{FT}$.

XXXVI. *Donc aux extrémités des grands axes des deux Sections coniques quelconques, les vîtesses sont comme les racines des paramètres, divisées par les distances*; car alors les distances ne different point des perpendiculaires.

XXXVII. Soit donc F le foyer d'une

Section conique (*fig.* 22.), *A* ſon ſommet, *FA* le rayon d'un cercle décrit du point *F*, le paramètre du cercle ſera 2 *FA*, & par la précédente on aura la vîteſſe au point *A*, pris dans la Section à la vîteſſe dans le cercle qui a *FA* pour rayon, comme $\sqrt{L}$ à $\sqrt{2FA}$: car les perpendiculaires étant ici égales, les vîteſſes ſont comme les racines des paramètres.

XXXVIII. Or dans la parabole (*Sect. con. n.* 31.) $L = 4FA$, il eſt moindre que cette quantité dans l'ellipſe, plus grand dans l'hyperbole ; donc la vîteſſe au ſommet de la *parabole* ſera à la vîteſſe dans le cercle dont *FA* eſt le rayon, comme $\sqrt{4FA}$ à $\sqrt{2FA}$, & par conſéquent comme $\sqrt{2}$ à 1 ; elle ſera en moindre raiſon au ſommet de l'*ellipſe*, en raiſon plus grande au ſommet de l'*hyperbole* ; de maniere que les quatre Sections du cône épuiſent tous les différents rapports de vîteſſe, lorſque la force centrale diminue, comme le quarré de la diſtance augmente.

XXXIX. Si donc la vîteſſe de projection eſt perpendiculaire à la direction de la peſanteur, & qu'elle ſoit égale à celle que le mobile acquerroit en tombant librement le long de la moitié de ſa diſ-

tance au centre des forces, la courbe décrite sera (*n*°. 10.) une circonférence de *cercle*. Ce sera une *parabole*, si la vîtesse est plus grande dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1, que celle que le mobile acquerroit en tombant de la moitié de sa distance au centre des forces; ce sera une *ellipse*, si elle est moindre, & une *hyperbole*, si elle est plus grande que dans ce rapport de $\sqrt{2}$ à 1.

En effet, nous venons de voir que ces courbes peuvent être décrites dans ces circonstances : or deux orbes qui se touchent, ne peuvent être décrits en vertu de la même pesanteur & de la même vîtesse, parce que la pesanteur & la vîtesse étant données, la courbure de l'orbe est déterminée, & est dans ce cas nécessairement unique; donc puisque les différentes Sections coniques épuisent les différents rapports de vîtesse & peuvent être décrites; aucune courbe différente d'elles ne peut l'être, lorsque la force centrale suit le rapport renversé du quarré des distances, & que sa direction est perpendiculaire à celle de la projection; c'est la solution du *problême inverse des trajectoires*.

XL. Dans la parabole, *les vîtesses varient*

rient en raiſon inverſe des racines des diſtances ; elles varient en plus grande raiſon dans l'ellipſe, *moins dans* l'hyperbole.

Les viteſſes dans la même orbite ſont (*n°. 6.*) en raiſon inverſe des perpendiculaires abaiſſées du centre des forces ſur les tangentes : or (*Sect. con. n.* 36.) ces perpendiculaires varient dans la *parabole* en raiſon des racines des rayons vecteurs, elles croiſſent plus dans l'*ellipſe*, moins dans l'*hyperbole*. Donc, &c.

XLI. Puiſqu'au ſommet *A* de la *parabole*, la viteſſe eſt à celle du cercle pris à la même diſtance, comme $\sqrt{2}$ à 1, ce rapport demeurera le même dans tous les points de la parabole, puiſque les viteſſes dans les différents points de cette courbe croîtront comme celles des cercles pris aux mêmes diſtances en raiſon ſous-doublée des diſtances inverſes ; ce qui fera ſubſiſter le premier rapport.

Dans l'*ellipſe* ce premier rapport diminuera à tous moments juſqu'au ſommet le plus éloigné du centre des forces ; de maniere que ſi 1 ou $\sqrt{1}$ repréſente la viteſſe dans le cercle à la même diſtance, & $\sqrt{x} > 1$; mais $< \sqrt{2}$ celle de l'ellipſe au ſommet le plus proche *A*, ce rapport ne ſera celui des viteſſes qu'au

ſeul point *A*; depuis ce point il décroîtra continuellement juſqu'au point *a* le plus éloigné de *F* : car en s'éloignant de *A*, les viteſſes des cercles décroîtroient en raiſon inverſe des racines des rayons vecteurs (*n*°. 19.), & ici elles décroiſſent dans un plus grand rapport.

D'où il ſuit que, quoique les viteſſes dans l'ellipſe aient d'abord été plus grandes vers la baſſe apſide *A*, que dans les cercles correſpondans, elles diminueront peu-à-peu en remontant, & ne tarderont pas d'arriver au rapport d'égalité; ce que nous démontrerons devoir arriver au bout du petit axe ou à la moyenne diſtance, après ce point les viteſſes dans les cercles l'emporteront, & toujours de plus en plus; mais par des accroiſſements très-petits, ſur les viteſſes dans l'ellipſe, pendant que le mobile avancera vers le point *a*, terme de la plus grande diſtance où la viteſſe ſera $\sqrt{x} < 1$, le corps ayant alors moins de viteſſe qu'il ne lui en faut pour décrire un cercle, deſcendra & s'approchera du centre; ſa viteſſe croîtra plus que dans les cercles correſpondans, & arrivé à ſa baſſe apſide, il aura plus de viteſſe qu'il ne lui en faut pour ſe mouvoir circulairement; il s'élevera par ce moyen

au deſſus du cercle tracé à cette diſtance, & remontera.

Par la même raiſon, ſi au point *A* de l'*hyperbole*, la viteſſe eſt $\sqrt{y} > \sqrt{2}$, & que la viteſſe dans le cercle ſoit 1 ou $\sqrt{1}$, ce rapport ne ſubſiſte qu'au ſeul point *A*, il croîtra continuellement depuis ce point, & ce ſera ſans retour.

XLII. Ainſi dans tous les points de la parabole, la viteſſe eſt plus grande que dans l'ellipſe, & moindre que dans l'hyperbole. *Elle eſt dans la parabole égale à celle qu'auroit un corps dans un cercle pris à une diſtance deux fois moindre; elle eſt plus petite dans tous les points de l'*ellipſe, *plus grande dans tous les points de l'*hyperbole.

Car par tout dans la parabole la viteſſe étant à celle du cercle pris à la même diſtance, comme $\sqrt{2}$ à 1, & la viteſſe dans ce cercle étant à la viteſſe dans un cercle deux fois moindre, comme 1 à $\sqrt{2}$, (*n°. 19.*) la premiere de ces viteſſes eſt néceſſairement égale à la troiſiéme; c'eſt-à-dire, celle dans tous les points de la parabole égale à celle d'un corps qui circuleroit dans un cercle pris à une diſtance du foyer deux fois moindre; elle eſt dès-lors plus petite dans tous les points de

l'ellipſe, plus grande dans tous ceux de l'hyperbole.

XLIII. D'où il ſuit que la viteſſe dans l'ellipſe, à un point quelconque *R*, eſt égale à celle d'un cercle pris à une diſtance plus grande que $\frac{FR}{2}$; & que dans l'hyperbole, elle eſt égale à celle d'un cercle pris à une diſtance moindre que $\frac{FR}{2}$.

XLIV. *A la moyenne diſtance de l'ellipſe, la viteſſe eſt égale à celle du cercle pris à la même diſtance :* car ſoit *a* le grand axe, *b* le petit, $\frac{bb}{a}$ ſera le paramètre, & la viteſſe dans l'ellipſe (*n.* 35.) ſera comme $\frac{\sqrt{bb}}{\sqrt{a}}$ diviſée par *ι*, qui dans le cas de la moyenne diſtance $= b$; donc en ce cas *V* ſera $\frac{b\sqrt{1}}{b\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{a}}$: or dans le cercle (*Ibid.*) la viteſſe ſera $\frac{\sqrt{aa}}{\sqrt{a}}$ diviſée par $a = \frac{a\sqrt{1}}{a\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{a}}$: donc elle ſera la même que dans l'ellipſe ; donc quand la force centripète eſt dirigée vers le foyer, la viteſſe à la moyenne diſtance de l'ellipſe, ou au bout du petit axe, eſt égale à celle du cercle à la même diſtance. *

* A la haute apſide de l'ellipſe, la viteſſe eſt moindre que dans le cercle qui ſeroit décrit à la même diſtance ; elle eſt plus grande à l'apſide inférieure : donc dans le

XLV. Or dans les différents cercles concentriques, les viteſſes (*n. 19.*) ſont en raiſon inverſe des racines des diſtances; donc *les viteſſes des corps qui décrivent des ellipſes par une force dirigée au foyer commun, ſont en raiſon inverſe des racines des diſtances moyennes*, comme *Képler* l'a obſervé par rapport aux Planètes.

XLVI. Qu'un mobile fût jetté dans une direction oblique à ſon rayon vecteur avec une viteſſe capable de lui faire parcourir un cercle en ſuppoſant qu'il ſe mût dans une direction perpendiculaire, il ſuit de la propoſition précédente qu'il décrira une ellipſe qui aura le double du

paſſage de l'une à l'autre il y a eu un lieu où la viteſſe dans l'ellipſe a été la même que dans le cercle correſpondant; & ce point n'a pu être que la diſtance moyenne.

Ces viteſſes alors étant les baſes des aires décrites en même-tems dans le cercle & dans l'ellipſe, ces aires ſont comme leurs hauteurs, qui ſont dans le cercle, la moyenne diſtance ou le demi-grand axe de l'ellipſe, & dans celle-ci le demi-petit axe; donc ces aires ſont alors en même rapport que les aires entieres du cercle & de l'ellipſe, & la raiſon compoſée de la directe de ces aires entieres & de l'inverſe des aires décrites en tems égaux, qui exprime, (*n°. 5.*) la raiſon des tems eſt dans ces deux courbes une raiſon d'égalité; d'où il ſuit que dans ces deux courbes les temps périodiques ſont les mêmes, & dans les ellipſes différentes (*n. 19.*) les mêmes qui ont été trouvées n°. 34.

rayon vecteur pour grand axe, & dont le point de projection ſera la moyenne diſtance, ou l'extrêmité du petit axe.

XLVII. Ainſi une ellipſe peut être décrite, 1°. Lorſque la viteſſe de projection eſt égale à celle d'un corps qui décrit un cercle à la même diſtance, & alors il faut que la direction de la viteſſe ſoit oblique ſur le rayon vecteur. 2°. Lorſque la viteſſe de projection eſt perpendiculaire ſur le rayon vecteur, & plus petite que celle d'un cercle circulant à la même diſtance, & le lieu de projection ſera la haute apſide. 3°. Lorſque la viteſſe étant perpendiculaire à la direction de la force centripète & au rayon vecteur, elle eſt plus grande que celle d'un cercle à la même diſtance; mais dans un rapport moindre que $\sqrt{2}$ à 1, & le lieu de projection ſera la baſſe apſide. 4°. Enfin, lorſque la viteſſe étant oblique ſur le rayon vecteur, elle eſt moindre ou plus grande dans un rapport moindre que $\sqrt{2}$ à 1, que celle d'un cercle qui atteint à cette diſtance, & alors le lieu de projection ſera entre la plus grande & la moyenne diſtance, ſi $\sqrt{x} < 1$, & entre la plus petite & moyenne diſtance, ſi $\sqrt{x} > 1$, quoique moindre que $\sqrt{2}$, le mobile deſcendra,

ſi l'angle des deux forces eſt aigu, il remontera s'il eſt obtus; & dans toutes ces différentes poſitions, ſi la viteſſe eſt $\sqrt{2}$, celle du cercle correſpondant étant 1 ou $\sqrt{1}$, la courbe ſera une *parabole*, & ſera une *hyperbole*, ſi la viteſſe de projection eſt plus grande que $\sqrt{2}$. Par où l'on voit que quelle que ſoit la viteſſe & la direction du mobile, pourvu qu'il peſe ſur un centre déterminé, avec une force proportionnelle au quarré de la diſtance réciproque, il décrira excluſivement à toute autre courbe, une Section conique dont le foyer ſera le centre des tendances.

XLVIII. Puiſqu'un mobile décriroit un cercle, s'il étoit jetté perpendiculairement avec la viteſſe qu'il acquerroit en tombant le long de la moitié du rayon, il décrira une parabole, ſi la viteſſe de projection eſt celle qu'il acquerroit en tombant librement par ſa peſanteur actuelle de la hauteur du rayon entier, ou de ſa diſtance au centre : car dans les mouvemens uniformément accélérés, les viteſſes étant comme les racines des eſpaces, elles ſeront ici comme 1 & $\sqrt{2}$, comme il a été trouvé dans le cercle & la parabole pour tous les points de cette courbe.

Si la hauteur d'où il faudroit tomber pour acquérir la viteſſe de projection, eſt plus grande que la diſtance au centre des forces, ou que le rayon, la courbe ſera une hyperbole, & la viteſſe ſera $\sqrt{y} > \sqrt{2}$.

Si au contraire le mobile part avec une viteſſe moindre que celle qu'il auroit acquiſe en tombant de la hauteur du demi-rayon, il décrira une ellipſe qui aura le centre des forces à ſon foyer le plus éloigné, & le lieu de ſa projection ſera entre la plus grande & la moyenne diſtance. Si la viteſſe eſt plus grande que celle qui ſeroit acquiſe par la chûte dans la moitié du rayon, mais moindre que celle qui ſeroit acquiſe par la chûte le long du rayon entier, la courbe ſera encore une ellipſe, & le lieu du départ ſera entre la petite & la moyenne diſtance, ou à la petite diſtance même, & la courbe décrite ſera encore une ellipſe, ſi la viteſſe du départ eſt égale à celle qui ſera acquiſe par la chûte dans la longueur du demi-rayon, pourvu que la direction de la viteſſe ſoit oblique ſur le rayon vecteur; cet article n'eſt que l'application ou le développement de l'article précédent.

XLIX. Il eſt maintenant facile de con-

cevoir *comment ſe fait le mouvement dans une ellipſe, & comment le corps, après s'être approché du centre par la force de ſa peſanteur, doit enſuite s'en éloigner à la baſſe apſide où ſa peſanteur eſt plus grande.* En effet le corps projetté à ſa plus grande diſtance avec une viteſſe moindre que celle qui eſt néceſſaire pour y décrire un cercle, ſera forcé de décrire une courbe qui tombera au-dedans de ce cercle, & la peſanteur commençant à faire un angle aigu avec la force tangentielle, la viteſſe croîtra par dégrés en s'approchant du centre, tant par la nature de l'angle aigu, que par l'accroiſſement de la peſanteur. Les viteſſes dans les cercles croîtroient auſſi à ces diſtances, & ſi celles de l'ellipſe ne croiſſoient pas en plus grande raiſon, les viteſſes des cercles conſerveroient leur premiere ſupériorité, & le corps ne pourroit en aucun lieu ſe tenir à la même diſtance du centre, beaucoup moins s'en écarter & remonter; mais les viteſſes dans l'ellipſe, croiſſant comme les perpendiculaires diminuent, & ces perpendiculaires (*Sect. con. n. 36.*) diminuant en plus grande raiſon que les racines des rayons vecteurs, qui expriment les accroiſſements de viteſſe dans

les cercles, elles croiſſent plus que dans les cercles correſpondans, où les viteſſes ne croiſſent que d'un côté, & à raiſon de la peſanteur, & enfin parviennent à l'égalité. Alors le mobile ſeroit en état de décrire un cercle, à ne conſidérer que l'intenſité de ſa viteſſe; mais la direction de ſa peſanteur n'étant pas encore perpendiculaire à ſa viteſſe tangentielle, il continuera de deſcendre au-deſſous du cercle tracé à cette diſtance. Après ce point, la viteſſe du corps commencera à l'emporter au-deſſus de celle des cercles; mais l'angle des forces continuant à être aigu, le corps continuera de s'approcher du foyer, juſqu'à ce que parvenu à la baſſe apſide, où le rayon vecteur eſt perpendiculaire ſur la tangente, il commencera à s'élever au-deſſus du cercle tracé à cette diſtance, & à remonter par une branche de courbe, ſemblable & égale à la premiere: car ſi la viteſſe dans ce cercle étoit là capable de ſoutenir l'effort de la peſanteur, & de retenir le corps à la même diſtance, une plus grande viteſſe comme eſt en ce lieu celle de l'ellipſe, ſe laiſſera moins infléchir par la même force, & emportera le corps à un plus grand éloignement du centre.

L. Par le même principe, *l'orbe sera également courbe aux deux extrémités du grand axe :* car si l'on suppose les tems égaux, les aires décrites à ces deux extrémités seront égales (*n.* 4.), & les arcs en raison inverse des distances (*n.* 6.) Les sinus verses des arcs décrits, seront de leurs côtés comme les forces, & par conséquent en raison inverse des quarrés des distances, ou, ce qui est le même ici, en raison directe des quarrés des arcs décrits : or cette propriété entraîne nécessairement l'égalité de courbure; car dans une courbe quelconque, les sinus verses des arcs infiniment petits étant comme les quarrés de ces arcs divisés par les diamètres des cercles osculateurs (*Sect. con. n.* 71.), & ces sinus étant ici comme les quarrés des arcs, il faut que les diamètres des cercles osculateurs, & par conséquent ces cercles eux-mêmes, soient égaux, & qu'il y ait même courbure en ces deux extrémités de l'axe.

En effet, soit 2 la grande distance, 1 la petite, les vitesses à la petite & à la grande distance seront entr'elles comme 2 & 1, & les pesanteurs comme 4 & 1 : or, quoiqu'il paroisse d'abord que le mouvement 2 doive être plus infléchi par

la peſanteur 4, que le mouvement 1 par la peſanteur 1; en y réfléchiſſant on trouve facilement que la choſe eſt autrement: car la viteſſe 2 faiſant effort pour porter le corps dans la tangente à une diſtance double dans le tems donné, & le ſinus compris entre la tangente & la courbe, étant quadruple à une diſtance double du point de contact, lorſque la courbure eſt la même: on voit que la peſanteur 4 n'a que la force néceſſaire pour procurer cette égalité de courbure ou d'inflexion.

Il faut conſidérer ici les tangentes comme des lignes qu'il faut courber également: or à la petite apſide la tangente eſt double dans le cas préſent, & chacun de ces points réſiſte à l'inflexion avec une force double; c'eſt donc une réſiſtance quadruple qu'elle oppoſe dans le même tems à l'égalité de courbure, & il faut par conſéquent y employer une force quadruple. Il n'eſt donc pas poſſible que le corps abandonne l'ellipſe lorſqu'il eſt parvenu à ſa moindre diſtance; mais il doit continuer ſon mouvement dans cette courbe en s'approchant & s'éloignant alternativement du foyer centre des tendances, & deſcendre & remonter ſans ceſſe d'une apſide à l'autre dans une demi-révolution.

LI. *Mais ſi la peſanteur ne ſuit pas exactement la loi du quarré des diſtances inverſes, ſi elle ſuit, par exemple, un rapport moyen entre la réciproque des quarrés & des cubes des diſtances, le corps s'approchera encore & s'éloignera alternativement du centre, mais n'arrivera à l'une & à l'autre de ſes apſides, qu'après plus d'une demi-révolution. Ce ſeroit le contraire, & le corps arriveroit à chacune de ſes apſides avant une demi-révolution, ſi la force centrale ſuivoit un rapport moindre que la réciproque du quarré de la diſtance.*

Car 1°. ſi la force centrale ſuivoit la raiſon inverſe du cube, le corps qui auroit commencé à s'approcher du centre, s'en approcheroit toujours (*n.* 22), & celui qui auroit commencé à s'en éloigner, continueroit de le faire ſans pouvoir y être ramené. La viteſſe dans les cercles étant alors en raiſon inverſe des diſtances, auſſi bien que dans la courbe, il ne pourroit y avoir de prévalence alternative entre ces vîteſſes; mais ſi la peſanteur ſuit un rapport plus grand que la réciproque du quarré, & moindre que la réciproque du cube de la diſtance, les viteſſes néceſſaires pour décrire des cercles autour du centre des forces, croîtront & décroî-

tront moins dans les différentes diſtances que ſi la force centrale ſuivoit la raiſon inverſe des cubes, & par conſéquent moins que dans le rapport renverſé des diſtances, & dès-lors dans toute courbe qui n'eſt pas équiangle, moins que dans l'orbite qui ſera décrite (*n.* 6.) ; il pourra donc y avoir une prévalence alternative entre les viteſſes des cercles & les viteſſes de l'orbite ; enſorte que, quoique la premiére ſoit ſupérieure à la plus grande diſtance, la derniére puiſſe le devenir aux moindres diſtances, ce qui forcera le corps de monter & de deſcendre alternativement d'une apſide à l'autre ; & parce que les viteſſes des cercles, dans cette hypothèſe de peſanteur, approchent plus de croître dans le rapport même des viteſſes de l'orbite, que dans la loi de peſanteur en raiſon inverſe du quarré, la viteſſe de l'orbite emploiera plus de tems à l'emporter ſur la viteſſe des cercles, que dans la loi de peſanteur réciproque aux quarrés des diſtances, & par conſéquent le corps emploiera plus d'une révolution pour aller d'une apſide à l'autre, & ce ſurplus ſera d'autant plus grand, que la loi de gravité s'approchera davantage de la loi réciproque du cube des diſtances.

2°. Mais si la gravité suit un rapport moindre que celui du quarré de la distance inverse, les vitesses dans les cercles augmenteront moins en s'approchant du centre, que dans la supposition d'une pesanteur en raison inverse du quarré de la distance, & elles seront égales à toutes les distances. (*n.* 17.) Si la force centrale est en raison inverse de la simple distance, & par conséquent la vitesse dans l'orbite l'emportant plus aisément sur celle des cercles, que dans la loi de la réciproque des quarrés des distances, le corps arrivera plûtôt à son apside, & y parviendra en moins d'une demi-révolution. Dans ce cas-là même, & dans ces différentes sortes de loix, le corps seroit donc encore exempt de chûte, & l'on voit par là de plus en plus combien peu sont fondés ceux qui craignent qu'il ne se précipite au centre, quand la loi suit le rapport inverse du quarré de la distance.



CHAPITRE IV.

De la Gravitation.

Son existence, sa réciprocité, son universalité, ses loix, son influence sur le mouvement des Planètes & des Comètes.

LII. PUISQUE les Planètes principales décrivent autour du Soleil des aires proportionnelles aux tems, & que les Satellites, selon les observations, décrivent de pareilles aires autour de leurs Planètes principales, il s'ensuit (*n.* 4.) que les premieres sont animées par une force qui les porte constamment vers le Soleil, & que les seconds ont une pareille tendance vers leurs Planètes principales.

LIII. Nous avons vu (*n.* 8.) qu'aucune cause étrangère à la force projectile une fois imprimée, & à la Gravitation continuelle, ne peut affecter le projectile sans troubler la proportionnalité des aires aux tems; donc puisque cette proportionnalité est constante dans les Planètes, ces Astres se meuvent dans des espaces sans résistance, du moins appréciable & sensible

ble dans une longue ſuite de révolutions.

LIV. Puiſque les eſpaces céleſtes ſont ſans réſiſtance, ils doivent être ſans action, & par conſéquent la peſanteur qui y regne n'y eſt l'effet d'aucun fluide ni d'aucune impulſion, mais eſt d'une force primitive, d'un ordre parallèle à l'impulſion avec laquelle elle ſe mêle & ſe combine pour donner enſemble le reſſort qui anime les cieux.

LV. Si la peſanteur étoit l'effet d'un tourbillon, il faudroit (*n*^{os}. 13 & 14.) que la matière ſubtile qui nous environne, circulât 17 fois plus vîte que ne fait la terre, & alors elle entraîneroit tout dans ſa direction par ſa force horiſontale beaucoup plus grande que ſa force centrifuge.

Alors même la peſanteur ne ſeroit pas dirigée vers le centre, mais les corps dans les différens parallèles ſeroient chaſſés perpendiculairement à l'axe de la terre, c'eſt-à-dire, directement aux centres des cercles particuliers où ils ſe trouvent, & dont s'éloigne la force centrifuge.

Inutilement a-t-on cherché à décompoſer cette force centrifuge ſur une tangente ſphérique pour en voir réſulter une force centrale dirigée vers le centre. Car ſi la force centrifuge oblique à cette tan-

gente, ſe décompoſe en une force dirigée ſelon le rayon de la ſphère, elle ſe décompoſe en même tems en une autre force dans la direction du méridien, & ces deux forces agiſſant de concert ſur le mobile, le précipiteroient au centre du parallèle où il ſe trouve, comme s'il n'y avoit point eu de décompoſition; c'eſt ainſi que dans un vaſe hémiſphérique plein d'eau, un corps léger s'éléve à la ſurface, non ſelon la direction d'un rayon de la ſphére, mais ſelon la direction de la colomne où il ſe trouve, quoique la peſanteur de cette colomne ſoit oblique ſur la tangente ſphérique du vaſe. En général, ſi la peſanteur étoit l'effet d'un fluide, il faudroit que ce fluide agît ſur les corps qui tombent & qui fuient, avec autant de force que ſur les corps en repos; ce qui eſt difficile à ſuppoſer, tout corps en mouvement ſe dérobant à proportion aux impreſſions de celui qui le pourſuit. Il faudroit que les élémens des corps fuſſent égaux en maſſe & en ſuperficie, & que les parties extérieures des mixtes ne couvriſſent point les intérieures & ne les miſſent point à l'abri du choc d'un tel fluide; ce qu'il ne ſeroit pas aiſé de concilier avec l'hétérogénéité des

mixtes, & ce qui ſeroit cependant abſolument néceſſaire pour que la peſanteur fût à très-peu près proportionnelle aux maſſes.

LVI. Puiſque la peſanteur n'eſt l'effet d'aucune impulſion, elle affecte les parties mêmes de la matiere, & doit être générale & réciproque; pourquoi cette vertu ſeroit-elle plutôt dans certains corps que dans d'autres?

Newton a trouvé, par l'expérience des pendules, & par la chûte également prompte de tous les corps dans le vuide, que la gravité eſt une puiſſance qui n'agit pas ſeulement ſur la ſurface des corps, mais qui pénetre intimément leur ſubſtance; qui affecte leur centre & leurs parties internes avec la même force que les externes, qui n'admet aucune variation dans la même matiere, à la même diſtance, & que ſon action ne peut être altérée par aucun corps interpoſé ou par aucun obſtacle; ce qui indique ſon univerſalité, & par là même ſa réciprocité.

Si elle n'étoit pas réciproque, une pierre qui tombe, preſſeroit la terre ſans en être preſſée, la terre céderoit à cet effort, & ſe mouvant par un mouvement toujours accéléré, elle iroit ſe perdre dans l'im-

mensité de l'espace au-delà des limites de l'Univers. La Terre presse donc à son tour la pierre ou la montagne, son hémisphère boréal presse son hémisphère austral, & deux de ses segmens inégaux se pressent également & mutuellement par la même raison; & par conséquent toutes ses parties gravitent l'une vers l'autre.

La Lune pese sur la terre, autour de laquelle elle tourne & décrit en plusieurs points des aires proportionnelles aux tems; la Terre & la Lune pesent ensemble sur le Soleil, & il en est à cet égard de la Lune, comme de tout projectile qui se meut en l'air, qui gravite avec la Terre sur le Soleil, tandis que son mouvement propre autour de la terre, est aussi régulier que si la Terre étoit en repos.

Les Parties de la Lune gravitent vers la Lune, autrement cet Astre tournant sur son centre dans l'espace d'un mois, elles se dissiperoient, par leurs forces centrifuges; ces parties retomberoient donc sur la Lune, si on les en détachoit, & n'y ayant aucune raison pour faire finir brusquement cette sphère d'activité de la Lune, nous devons conclurre que la gravitation vers elle s'étend à de grandes distances, qu'elle a lieu sur la Terre, &

par la même raiſon, qu'en même tems que les Satellites de Saturne & de Jupiter peſent ſur ces Aſtres, ces Aſtres à leur tour peſent ſur ces Satellites, & tous enſemble ſur le Soleil, qui peſe lui-même ſur tout le ſyſtême planétaire qui peſe vers lui.

C'eſt ainſi que deux gouttes placées ſur un bois verniſſé, ſe portent l'une vers l'autre quand elles ſont près, & qu'on diſtingue à l'œil le mouvement de toutes les deux. Ce principe eſt une ſuite du principe général que la *réaction eſt égale à l'action.*

LVII. *Képler* & les Aſtronomes ont obſervé que les viteſſes des Planètes autour du Soleil, & celles des Satellites autour des Planetes principales, ſont en raiſon inverſe des racines quarrées de leurs diſtances reſpectives au Soleil & aux Planètes principales, & que leurs tems périodiques ſont comme les racines quarrées des cubes de leurs diſtances moyennes: or nous avons vu (*nos* 19, 34 & 35.) qu'il faut une peſanteur variable en raiſon inverſe du quarré des diſtances, pour que cette loi des viteſſes & des tems ſoit obſervée; c'eſt donc dans ce rapport que varie la peſanteur: & on a vu dans la

Préface de cet ouvrage, qu'en effet la pesanteur de la Lune n'est que la pesanteur des corps terrestres diminuée en même raison, que le quarré de la distance de la Lune est plus grand que le quarré de la distance des corps terrestres au centre de la Terre.

LVIII. Voilà donc, & la pesanteur & la loi de la pesanteur indiquées par les regles de *Képler*; & par conséquent l'une & l'autre est, sinon un fait observé, du moins une conséquence immédiate & nécessaire des faits observés. Reconnoître cette force & sa loi, n'est pas faire un systême; c'est interroger la Nature & admettre les résultats qu'elle fournit.

LIX. Or si telle est la loi de la gravitation, il est nécessaire (*n.* 47.) que les Comètes & les Planètes décrivent l'une des Sections coniques; & puisque les faits nous apprennent que leurs courbes sont excentriques & refermées, il faut que ce soient des ellipses qui aient le Soleil pour centre des tendances & pour foyer; elles seront donc forcées de s'approcher & de s'éloigner alternativement de cet Astre, de décrire des aires proportionnelles aux tems, & de suivre dans leur cours les regles que *Képler* a découvertes

pour leurs tems périodiques & pour leurs viteſſes moyennes. Il ſuffit pour cela que les viteſſes de leurs projections aient été telles qu'elles ont été déterminées *n*°. 48.

LX. Puiſque les eſpaces céleſtes ſont ſans réſiſtance, les Aſtres une fois mûs ne perdront point leurs mouvemens, & les Comètes pourront ſe mouvoir en toutes ſortes de directions; inclinées à l'écliptique ſous de très-grands angles, & ſous des angles très-différents, décrivant des ellipſes très-allongées & très-excentriques, leurs tems périodiques ſeront très-longs; elles rempliront en quelque ſorte tout l'espace abandonné par les Planètes, & qui autrement fût devenu inutile; elles ne reviendront que deux fois à chaque révolution, après un tems très-long au plan de l'écliptique, & lorſque leur viteſſe ſera fort grande; & par conſéquent elles ne pourront, ni déranger les Planètes, ni ſe troubler conſidérablement dans leurs mouvemens.

Dans leurs aphélies, où leurs mouvemens ſont très-lents, la plus petite force ſeroit capable de les détourner de leur route ordinaire; mais comme elles coupent l'écliptique ſous de très-grands & de très-différens angles, qu'elles ont dif-

férentes excentricités ; elles ſont alors à de très-grandes diſtances les unes des autres, & ne peuvent s'affecter que foiblement. Celles qui deſcendent le plus bas dans leurs périhélies, & qui en conſéquence ſe meuvent le plus lentement dans leurs aphélies, ſont auſſi celles qui s'éloignent le plus des autres & qui remontent le plus haut.

Cependant, à cauſe du grand nombre de Comètes qui ſe trouvent à ces diſtances, à cauſe ſur-tout de la lenteur de leur cours, il pourra arriver que quelques-unes ſe troublent un peu dans leurs mouvemens par leurs mutuelles gravitations. Alors leurs excentricités ſeront changées, & le tems de leurs révolutions quelquefois augmenté, quelquefois diminué ; de maniere que l'on ne doit pas toujours s'attendre que la même Comète revienne exactement dans la même orbite & dans les mêmes tems périodiques ; il ſuffit que les changemens que l'on y peut trouver, ne ſoient pas plus grands que ceux qui peuvent réſulter de ces cauſes, comme il eſt arrivé à la Comète de 1759, qui a avancé de 20 jours ſur le calcul.

LXI. Puiſque les Comètes s'élevent à de grandes diſtances où elles ſont peu

échauffées par le Soleil, il s'enſuit que cet Aſtre venant à les échauffer conſidérablement vers leurs périhélies, élevera juſqu'à une hauteur fort grande, au-deſſus de leurs ſurfaces, une ſorte de fumée compoſée d'exhalaiſons & de vapeurs, qui refléchiſſant les rayons du Soleil, formera comme une longue traînée de lumiere, aſſez foible, qui deviendra toujours plus grande & plus brillante à meſure que la Comète approchera de cet Aſtre.

Quand la Comète aura le Soleil à l'Orient & s'avancera vers lui, la vapeur élevée de ſon noyau ſera pouſſée derriere ce corps par l'athmoſphère ſolaire, de la même maniere que la fumée d'un charbon que l'on meut eſt pouſſée derriere le charbon par la réſiſtance de l'air environnant, & la Comète aura une *queue*.

Quand la Comète ſera à l'Occident du Soleil & s'éloignera de lui, les vapeurs & les exhalaiſons que le Soleil éleve du côté tourné vers lui, reſteront de ce côté, & ſeront encore augmentées par celles qu'il ne laiſſera pas d'élever de l'autre côté, & qui ſeront chaſſées vers le Soleil par le mouvement de la Comète qui, dans ce cas, aura une *barbe*.

Quand enfin elle sera en conjonction avec le Soleil, la traînée de ses vapeurs, du moins la plus abondante, sera entr'elle & le Soleil, & ne se verra point ; elle débordera un peu à l'Orient & à l'Occident de la Comète, qui par-là paroîtra *chevelue.*

LXII. S'il y avoit des tourbillons, ils entraîneroient dans leurs directions une matiere aussi rare que celle qui forme les queues des Comètes, & ces queues seroient, dans toutes les situations de la Comète, dirigées dans le même sens, qui seroit celui du tourbillon ; ce qui est contraire à l'observation : mais puisqu'il n'y a point de tourbillons, la direction des queues sera telle qu'elle doit être, & il aura pû être arrivé qu'une Comète traînant après elle une vaste *queue*, en remontant de son périhélie, ait passé très-près de Saturne, qui ayant plus de volume & de densité, aura pu par son attraction s'approprier la longue queue de cet Astre, & peut-être l'Astre lui-même, les déterminer l'une & l'autre à circuler autour de lui ; ce qui aura condensé cette matiere & en aura formé un cours continu, ou une espece d'anneau mince & applati autour de Saturne, comme l'explique M. *de Maupertuis*.

Sans recourir à la queue d'une Comète, des parties denſes, diſperſées dans l'équateur de l'Atmoſphère de Saturne, & rapprochées ou réunies par l'attraction de cet Aſtre, auroient pu, en ſe rapprochant de toutes parts autour de l'équateur de cette Planete, s'embarraſſer ou s'entrelacer mutuellemeut avant que d'y être arrivées, & former une eſpece de pont continu autour de cette Planete; autrement il faudra regarder Saturne comme le débris d'une plus grande ſphère, qui n'aura conſervé que cette zône & un noyau intérieur; ou enfin ſuppoſer que cet anneau n'eſt qu'un amas de Satellites fort petits, & placés très-près les uns des autres; ce qui paroît peu vraiſemblable.

LXIII. Le phénomene des queues des Comètes indique, comme on vient de voir, une athmoſphère autour du Soleil; ces torrens ayant une direction oppoſée à celle de leur gravité, s'élevent dans cette direction en conſéquence de l'excès de la peſanteur de l'athmoſphère ſolaire vers le Soleil, de la même maniere qu'une colomne de vapeurs s'éleve dans l'air, parce que ſa gravité ſur la Terre eſt moindre que celle de l'air. La viteſſe des parties qui compoſent ces torrens diminuant

continuellement, ſelon le degré de leur élévation, elle éprouve plus de réſiſtance, & la queue de la Comète s'élargit vers ſon extrémité, comme cela arrive à un jet d'eau par la réſiſtance de l'air.

De-là Newton conclut que les Comètes, qui dans leurs périhélies s'approchent de très-près du Soleil, (celle de 1680 n'en fut diſtante que de la ſixiéme partie du diamètre du Soleil.) doivent y recevoir une diminution de viteſſe par la réſiſtance de cette athmoſphère ; ce qui les fera approcher de plus en plus près de cet Aſtre à chaque révolution, & les y précipitera tout-à-fait pour lui ſervir d'aliment au bout d'un très-grand nombre de révolutions, qui auront été déterminées par celui qui a tout dirigé dans ſa ſageſſe.

Sur ce principe, il en ſera de même des étoiles fixes, qui ne manqueront pas de briller d'un nouvel éclat, lorſque quelques Comètes viendront, en ſe précipitant ſur elles, ranimer leur chaleur & leur lumiere épuiſées.

Quoiqu'il en ſoit, cette athmoſphère ſolaire eſt néceſſairement fort rare, puiſque les queues des Comètes, à travers leſquelles on voit les Etoiles, le ſont

elles-mêmes beaucoup. Devant donc l'être de plus en plus à meſure qu'elle s'éloigne du Soleil, elle ne doit avoir aucune réſiſtance ſenſible à la diſtance de Mercure & des Planètes.

Nous ſavons que la denſité de l'air eſt proportionnelle à la force qui le comprime, & que cette force n'étant que le poids de l'athmoſphère, eſt d'autant moindre ſur chaque portion d'air, que cette portion eſt plus élévée. D'où il ſuit qu'en faiſant même abſtraction de la diminution de la gravité, ſi l'on prend les hauteurs de l'air en progreſſion arithmétique depuis la ſurface de la terre, les denſités de l'air à ces hauteurs ſeront en progreſſion géométrique : par exemple, ſi l'on diviſe l'athmoſphère en orbes concentriques d'une même épaiſſeur, les hauteurs de l'athmoſphère croîtront en progreſſion arithmétique ; & ſi l'on fait a, le poids qui comprime l'air ſupérieur, b celui qui preſſe l'orbe immédiatement contigu, c, d, &c ; les poids qui preſſent conſécutivement les orbes inférieurs, $a-b$ ſera la denſité du premier orbe ſupérieur, $b-c$ la denſité de l'orbe ſuivant, & parce que les denſités ſont comme les forces, on aura $a\, a-b :: b\, b-c$, & $a\, c = b\, b$;

donc $ab :: bc$ en progreſſion géométrique. Donc, puiſqu'il eſt trouvé par obſervation qu'à la hauteur de ſept milles d'Angleterre, la denſité de l'air eſt environ $\frac{1}{4}$ de celle qu'il a au niveau de la mer, à 14 milles, elle eſt $\frac{1}{16}$ de cette denſité, à 21 milles $\frac{1}{64}$, à 28 milles $\frac{1}{256}$, à 36 milles $\frac{1}{1024}$, à 42 milles $\frac{1}{4096}$, à 49 milles $\frac{1}{16384}$ de cette denſité, & tout-à-fait inſenſible à la hauteur d'un demi-diamètre de la Terre. S'il y avoit donc dans les Cieux une autre matiere que l'air, elle ſe précipiteroit dans ces intervales de l'air, tout ſeroit plein à nos diſtances, & un boulet de canon qui parcourt plus de mille fois ſon diamètre avant de faire une perte ſenſible, ne pourroit parcourir les $\frac{4}{3}$ de ſon axe, ſans perdre la moitié de ſa viteſſe; il n'y a donc point de fluide continu dans les Cieux.

LXIV. Nul phénomene ne nous indique d'ailleurs l'exiſtence de cette matiere; l'hypothèſe même des Cartéſiens, que la lumiere conſiſte en des vibrations de preſſion, en démontreroit, ſi elle étoit vraie, la rareté comme infinie : car puiſque les ſons forts ou foibles, graves ou aigus, ſe propagent avec la même viteſſe, il faut que les pulſations, excitées dans un

fluide élastique, conservent un mouvement uniforme, & que leur vitesse soit toujours la même que celle avec laquelle elles ont commencé : or quelle que soit la force comprimante, on peut la représenter par la pression d'un cylindre de fluide d'une certaine hauteur & d'une densité par-tout uniforme, de maniere que la vitesse initiale d'une pulsation excitée dans ce fluide, soit la même que celle qu'il acquerroit par la pression du cylindre supposé. Si donc on nomme E le ressort du fluide, de l'air par exemple, D la densité du cylindre d'air à la surface de la Terre, K sa hauteur, on aura $E = DK$, & la vitesse produite par E, sera égale à celle que produiroit DK : or la vitesse initiale résultant de la pression de ce cylindre, seroit celle que le fluide acquerroit en tombant librement de la hauteur $\frac{1}{2}K$, & seroit par conséquent comme $\sqrt{\frac{K}{2}}$; telle sera donc aussi la vitesse des pulsations excitées dans ce fluide (*n.* 11.)

Or, puisque $E = DK$, $K = \frac{E}{D}$, & $\sqrt{\frac{E}{2D}}$ sera la vitesse des pulsations, c'est-à-dire, qu'elle sera en raison composée de la directe sous-doublée de l'élasticité du

milieu, & de l'inverſe des racines de la denſité de ce milieu ; cela poſé, il eſt facile de trouver la viteſſe abſolue du ſon dans l'air, & la denſité de l'éther qui propageroit la lumiere.

1°. Puiſque les poids de l'eau de pluie & du vif argent, ſont entr'eux comme 1 à 14, & que ceux de l'air & de l'eau de pluie ſont comme 1 à 1000 ou environ, on aura les poids de l'air & du vif argent en raiſon de 1 à 14000 ; & par conſéquent lorſque la hauteur du barométre eſt de 30 pouces, la hauteur d'un cylindre d'air, uniforme à celui qui nous touche, & dont le poids eſt égal au reſſort de l'air, ſeroit $14000 \times 30 = 420000$ pouces = 35000 pieds d'Angleterre. C'eſt donc de la moitié de cette hauteur, c'eſt-à-dire, de la hauteur de 17500 pieds, qu'un corps devroit tomber pour acquérir la viteſſe initiale du ſon.

Or, dans le vuide, un corps emploieroit 33 ſecondes pour tomber de 17500 pieds, & par cette chûte acquerroit une viteſſe qui lui feroit parcourir 3500 pieds dans le même-tems d'un mouvement uniforme ; donc les pulſations de l'air doivent de même parcourir 3500 pieds en 33 ſecondes ; & parce que leur mouvement

ment eſt uniforme, $\frac{3500}{33}$ ou 1060 pieds d'Angleterre = 1040 pieds de Paris en une ſeconde ; ce qui s'accorde de fort près avec l'expérience, & ne peut s'y accorder davantage, à cauſe des différents états de l'air, en différents lieux, & dans différents tems.

2°. Par la même méthode, on détermineroit la viteſſe de la lumiere, ſi on connoiſſoit le reſſort & la denſité de l'éther; mais comme on connoît cette viteſſe, on peut s'en ſervir pour déterminer ce reſſort & cette denſité.

En effet, puiſque la viteſſe des pulſations eſt en raiſon compoſée de la directe ſoûdoublée du reſſort du milieu, & de la ſoû-doublée inverſe de ſa denſité, on peut dire qu'elle eſt en raiſon compoſée des racines du reſſort & de la rareté du milieu; de maniere que nommant m la rareté de l'éther, n ſon reſſort, on aura la viteſſe des pulſations du ſon, à la viteſſe des pulſations de la lumiere, comme 1 à $\sqrt{mn}$.

Or, la lumiere vient du Soleil à nous en 8′, & le ſon parcourant 1040 pieds en une ſeconde, il en parcourt environ 500000 en 8′, & par conſéquent 1. $\sqrt{mn}$ :: 500000 pieds à la diſtance du

Soleil à la Terre = 311234300000 pieds environ ; donc 1. $\sqrt{mn}$ :: 5. 3112343, & mn = 387467100000, ou en nombres ronds 400000000000 ; donc si n = 1000, on aura m = 400000000 ; or, n ne peut être plus grand que 1000 : car puisque l'éther causeroit dans cette hypothèse la dureté des corps, & que celle-ci est toujours vaincue par une force mille fois plus grande que le ressort de l'air ; il faut admettre que le ressort de l'éther ne pourroit pas être de mille fois plus grand que celui de l'air ; donc dans cette hypothèse la rareté de l'éther devroit être 400000000 fois plus grande que celle de l'air, qui, lui-même, est si rare & si poreux. Tous les principes supposent donc un vuide immense & une prodigieuse rareté de matiere dans les Cieux. Voyez *Euler*, Opusc. *de lumine*.

LXV. Puisqu'il n'y a rien dans les Cieux qui empêche les Comètes de se mouvoir en toutes sortes de sens, il n'y a rien non plus dans ces espaces qui ait dû forcer les Planètes à se mouvoir dans un même plan ; & par conséquent rien ne s'y oppose à la différente excentricité de leurs orbites, à leurs différentes distances, à leurs différentes inclinaisons, ni à la dif-

persion de leurs aphélies vers différents points du Ciel. Tous ces effets dépendent de la détermination originelle, persévérent d'eux-mêmes, & ne demandent point de cause continuellement appliquée. Si les Cartésiens sont obligés d'expliquer ces phénomènes, c'est que leurs principes semblent mener, & menent en effet à des résultats tous différents.

Il faut raisonner de même des différentes grosseurs des Planètes, de leurs mouvements, selon la suite des signes, de leurs rotations sur leurs centres, de l'inclinaison & du parallélisme de leurs axes. Tout cela ne demande qu'une détermination donnée dans l'origine, & il n'y a point de cause de l'origine des choses que la volonté de celui qui a commandé au néant, & qui a donné à tout l'être & la vie.

On sait en effet que la rotation des Planetes n'observe pas les loix de Képler pour le tems de la révolution périodique; ce qui est une preuve que ces différentes rotations ne dépendent pas du même principe entr'elles, ni de la cause qui produit les révolutions autour du Soleil ou les révolutions des Satellites. Si le tourbillon étoit la cause de ces effets, la Lune

tourneroit plus lentement qu'elle ne fait, ou la Terre dix-ſept fois plus vîte, & le Soleil acheveroit une converſion ſur ſon axe en beaucoup moins de 25 jours.

Mais dans le principe de la gravitation, dès-que la Terre aura été déterminée à tourner ſur ſon axe, ni ſa peſanteur ſur le Soleil, ni ſon mouvement de progreſſion ne pourront affecter cette détermination, & la Terre conſervera perpétuellement ſa viteſſe de rotation, la premiere inclinaiſon de ſon axe & ſon parallériſme.

Si la Terre ſe mouvoit ſur une ligne droite, on conçoit que quelle que fût l'inclinaiſon de l'axe ſur lequel elle tourne dans ſon mouvement journalier, cet axe conſerveroit toujours un exact parallériſme; or la même choſe doit arriver lorſque la Terre décrit une courbe; car cette courbe n'étant qu'une ſuite de petites diagonales inclinées les unes ſur les autres, il ſuffit de faire voir que la ſituation de cet axe de la Terre ne doit point changer dans le paſſage de cette Planète d'une diagonale dans l'autre; ce qui eſt évident, parce que l'action conjointe des deux forces qui animent la Terre, paſſant par ſon centre & s'y réuniſſant, il n'y a au-

cune cause qui puisse, ou qui doive faire avancer une des extrêmités de l'axe plus que l'autre, pour lui imprimer un mouvement de rotation, & détruire son parallélisme. Ce n'est donc point le parallélisme de cet axe, mais son léger défaut de parallélisme qui demande une cause ; & nous la trouverons dans la suite dans la figure de la Terre combinée avec l'action de la Lune.

LXVI. Il est vrai que, s'il n'y a rien dans les Cieux qui s'oppose à la différente inclinaison des orbites des Planetes sur le plan de l'écliptique, on n'y voit rien non plus qui détermine ses inclinaisons, & qui les resserre dans des limites aussi étroites qu'un angle de 6° 24′ ; mais aussi nous avons observé que ce n'est point là un de ces effets qui demandent une cause continuellement appliquée : or il n'y a que ceux-là dont il faille rendre raison en Physique. Y a-t-il d'autre cause du nombre & de la grosseur des Etoiles, que la volonté efficace de celui qui a dit : *Que la lumiere se fasse ; & elle se fit* ?

Envain donc *M. Daniel Bernoulli* calcule-t-il dans sa piece de 1734, le peu d'apparence qu'il y a que six orbites aient été placées par un pur hazard dans une

zône de position donnée, qui ne fût que la 17ᵉ partie de toute la surface sphérique ; nous conviendrons aisément que la chose n'est point arrivée par hazard, mais par les desseins de celui qui exclut tout hazard de l'administration du Monde qu'il a formé.

En effet, si toutes les Planètes & toutes les Comètes eussent été placées dans un même plan, il eût fallu trop en diminuer le nombre, en les écartant à de grandes distances pour qu'elles ne se troublassent point dans leurs mouvemens; au lieu que, par ces différentes inclinaisons, tout l'espace est rempli, pour ainsi dire, de mondes circulans, ou l'est du moins autant qu'il peut l'être ; & c'est apparemment là la raison pour laquelle la plûpart des Comètes sont si petites, que plusieurs n'ont jamais été visibles à l'œil nud, & n'ont été découvertes qu'à l'aide du télescope, lors même qu'elles passoient près de nous.

C'est donc la régularité des mouvements & le dessein de remplir l'espace autant qu'il étoit possible, qui ont pu déterminer le Créateur à donner aux Astres circumsolaires les différentes obliquités que nous leur voyons. Trop d'uniformité

eût appauvri le Monde, eût paru l'effet de la néceſſité; une dévarication plus grande eût paru l'effet du haſard, & eût peut-être donné lieu à moins de Mondes circulans. Il a donc fallu arranger tout de maniere que le peu d'inclinaiſon dans les orbites des Planètes nous ramenât à l'idée de régularité, que la grande dévarication des Comètes exclût celle de la néceſſité, & que cette double combinaiſon remplît l'eſpace autant qu'il étoit poſſible.

Ce que l'on pourroit craindre, c'eſt que, quand deux Planètes ſe trouvent dans leurs nœuds aſcendans ou deſcendans, l'inclinaiſon de leurs orbites ne diminuât par leur mutuelle attraction, & cela pourra en effet arriver quelquefois; mais les choſes ſe remettront dans leur état, dès-que l'une d'elles ſe trouvera dans ſon nœud aſcendant, & l'autre dans ſon nœud deſcendant; ce qui produira dans les orbites des oſcillations latérales, dont les quantités & différences ſeront trop petites pour être apperçues, comme nous allons le voir dans le chapitre ſuivant. *

* *Il faut en excepter l'Ecliptique qui diminue un peu d'obliquité par l'action de Venus.*

CHAPITRE V.

Suite des loix de l'Attraction & de l'explication du Mouvement des Planètes principales.

LXVII. PUISQUE l'attraction est réciproque & universelle (*n*°. 56.), elle doit dans chaque corps dériver de la tendance de toutes les parties de ce corps vers toutes les parties d'un autre corps ; & deux sphères s'attirent, parce que toutes les parties de l'une attirent toutes les parties de l'autre ; c'est-à-dire, que l'attraction est proportionnelle aux masses.

LXVIII. Nous avons vu (*n*. 57.) qu'une sphère attire en raison inverse du quarré de la distance à son centre, & cette attraction totale étant la somme de l'attraction de ses parties, il est naturel de penser que ces parties attirent selon la même loi. Cependant il est nécessaire de pénétrer au-delà de ce premier coup d'œil, & de voir si de l'attraction des parties en raison inverse des quarrés de leurs distances, il en résulte pour la sphère qu'elles compo-

ſent, une attraction totale en raiſon inverſe du quarré de la diſtance du centre de cette ſphère, ou ſi de l'attraction réciproque au quarré de la diſtance du centre total, il en réſulte pour les parties des attractions en raiſon inverſe des quarrés de leurs diſtances particulieres.

En effet, nous verrons dans la ſuite qu'il y a telle loi d'attraction, où celle des petites parties de matiere eſt quelquefois très-différente de l'attraction des ſphères compoſées de ces parties. Si l'attraction des parties de la matiere ſuivoit, par exemple, la raiſon inverſe du cube de leurs diſtances, les ſphères compoſées de ces parties, ne graviteroient pas toujours l'une vers l'autre, en raiſon inverſe du cube de la diſtance entre leurs centres, mais s'attireroient au contact avec une force infiniment plus grande qu'à la moindre diſtance du contact; ce qui eſt un rapport bien différent de celui qui ſe trouve entre les cubes des diſtances de leurs centres dans ces deux cas. Il faut donc rechercher plus ſoigneuſement ſi dans la loi de l'attraction d'une ſphère en raiſon inverſe du quarré de la diſtance à ſon centre, celle des parties qui la compoſent, varie dans la même proportion par rapport à leurs diſtances.

Newton a fait cette recherche, & il a trouvé qu'effectivement les parties d'une ſphère attirent en raiſon inverſe des quarrés de leurs diſtances, lorſque la ſphère attire en raiſon renverſée du quarré de la diſtance de ſon centre.

Pour le montrer, il ſuffit de faire voir que de la ſuppoſition de cette loi pour les parties, il réſulte pour la ſphère une attraction totale en raiſon inverſe du quarré de la diſtance à ſon centre, & telle qu'elle ſeroit ſi toutes les parties de la ſphère étoient concentrées ou réunies à ce centre.

Soit donc le corpuſcule *P*, (*fig.* 23.) placé hors de la ſphère *ADBG* à la diſtance *PC* du centre *C*, de *P*, tirez la droite *PEF*, qui rencontre le demi-cercle régénérateur en *E* & *F*, & l'arc *CS* décrit de *P* comme centre en *R*; que *Pef* ſoit une autre ligne droite tirée de *P*, formant un angle infiniment petit avec *PEF*, rencontrant le demi-cercle en *e* & *f*, & l'arc *CS* en *r*; tirez *RM*, *rm* perpendiculaires à *PC*, & *CH* perpendiculaire à *PF*.

Suppoſez que le cercle *ADBG*, eſt coupé perpendiculairement dans ſon axe *AB* par un cercle qui lui eſt égal, inclinez ce cercle au plan du premier, de ma-

niere que tournant autour de l'axe, il acquierre la ſituation *AdBg*, faſſe avec le premier un angle infiniment petit, & que *RV*, *ru* perpendiculaires au plan *ADB*, rencontrent le plan *AdB* en *V* & *u*, alors l'attraction du corpuſcule *P*, par la ſurface phyſique *RVur*, ſera $= \frac{Rr \times RV}{PR^2}$, & par la conſtruction $\frac{Rr \times RV}{PC^2}$.

Suppoſez à la diſtance *x* ou *z* une ſurface pareille à *RVru*, terminée de même par les plans circulaires *ADB*, *AdB* & par des perpendiculaires abaiſſées de *ADB* ſur *AdB*, ſa grandeur ſera en raiſon directe du quarré de ſa diſtance au ſommet *P* de la pyramide *PFf*; donc ſon attraction ſera à celle de *RVru*, en raiſon compoſée de la directe du quarré de ſa diſtance à *P*, & de l'inverſe du même quarré; c'eſt-à-dire, en raiſon d'égalité; donc l'attraction totale de la portion pyramidale terminée par les plans circulaires *ADB*, *AdB*, & par des perpendiculaires ſur *ADB*, en *E*, *e*, & *F*, *f*, ſera comme la ſomme ou le nombre de ces ſurfaces exprimées par *EF*; donc l'attraction de cette portion pyramidale *EFfe*, ſera $\frac{Rr \times RV}{PC^2} \times EF$.

Or, l'angle contenu par les plans des

deux cercles étant donné, & du plan AdB ayant tiré la perpendiculaire Dd ſur ADB, on aura $RV. RM :: Dd. CD = CA$; donc $RV = \frac{RM \times Dd}{CA}$.

De r tirez une perpendiculaire ſur RM, elle ſera égale à Mm, & le petit triangle qu'elle formera, ſera ſemblable à PRM; donc $Rr. Mm :: PR = PC. RM$; donc $Rr = \frac{Mm \times PC}{MR}$.

Subſtituez ces valeurs de RV & de Rr dans l'équation $\frac{Rr \times RV}{PC^2} \times EF$ ou $2HF$, vous aurez pour l'attraction de la portion pyramidale $PFfe$, $P = \frac{Mm \times Dd}{PC \times CA} \times 2FH$.

Cette force agit dans la direction PR, & elle eſt à ſon effet dans la direction de PC, comme PR à PM, (les forces RM ſe détruiſant de part & d'autre); donc pour la réduire dans la direction de PC, il faut la diminuer dans la raiſon de PM à $PR = PC$, & elle devient $P = \frac{Dd \times Mm \times PM}{PC^2 \times CA} \times 2FH$.

Or $PM = PH = PE + EH = PF - EH$; donc PM^2 ou $PH^2 = PE \times PF + \overline{PF - PE} \times EH - EH^2 = HF^2 + PE \times PF$.

Ce rectangle $PE \times PF$ eſt conſtant *par la propriété des ſécantes*; donc les in-

crémens ſimultanés Mm, Ho de PM^2 & HF^2 ſont égaux, & $Mm \times PM = Ho \times HF$.

Subſtituant donc ce ſecond membre à la place du premier dans l'équation de la force, on aura l'attraction de la portion pyramidale dans la direction PC égale à $\frac{Dd}{CA} \times \frac{2FH^2 \times Ho}{PC^2}$.

Or cette quantité eſt la différentielle ou l'incrément ſimultané de $\frac{Dd}{CA} \times \frac{2FH^3}{3PC^3}$ *; donc la ſomme des attractions des portions pyramidales ſemblables à $EFfe$, qui forment la partie du ſegment de ſphère terminé par les plans circulaires ADB, AdB, & par un plan perpendiculaire

* Soit dx l'accroiſſement ſimultané de chaque côté x du quarré xx, le quarré dans cet état ſera $xx + 2xdx$, le troiſiéme terme, qui eſt le quarré de dx, étant infiniment petit du ſecond genre, ou nul; donc $2xdx$, eſt l'accroiſſement ſimultané du quarré xx; donc on obtient la différentielle d'une quantité en la multipliant par ſon expoſant, diminuant celui-ci d'une unité, & multipliant le tout par la caractériſtique dx; donc $3x^2dx$ eſt la différence ou l'accroiſſement ſimultané de x^3, & x^3 eſt la ſomme ou l'intégrale de tous les $3x^2dx$; donc diviſant par 3, multipliant par 2, on aura $\int 2x^2dx = \frac{2}{3}x^3$; donc ſi l'on fait $FH = x$, $Ho = dx$, $\int 2FH^2 \times Ho$, ſera $\frac{2}{3}FH^3$. PC^2, qui diviſe cette quantité, étant une grandeur conſtante, n'a point de différentielle ou d'accroiſſement, & demeure le même dans les deux cas.

à *ADB* dans la droite *EF*, eſt $= \frac{Dd}{CA} \times \frac{2FH^3}{3PC^2}$.

Donc l'attraction de la portion de ſphère, qui eſt produite par la révolution du ſegment *EDF* autour de l'axe *AB*, ayant le même rapport à l'attraction de ce ſegment, que toute la circonférence du cercle à l'arc *Dd*, ſe trouve meſurée par $\frac{c}{r} \times \frac{2FH^3}{3PC^2}$, ou $\frac{c}{r}$ exprime le rapport de la circonférence au rayon; c'eſt-à-dire, qu'elle *eſt directement comme le cube de la corde FH, & réciproquement comme le quarré de la diſtance de la particule P au centre C de la ſphère.*

Donc l'attraction de ce corpuſcule par toute la ſphère, eſt comme le cube de ſon diamètre; c'eſt-à-dire, la denſité étant donnée, comme la quantité de matière directement, & comme le quarré de la diſtance au centre réciproquement; car alors la corde *FH* ſe confondant avec *AB*, l'attraction de toute la ſphère eſt meſurée par $\frac{c}{r} \times \frac{2AC^3}{3PC^2}$.

La ſolidité de la ſphère eſt les $\frac{2}{3}$ de celle du cylindre circonſcrit. Si $\frac{c}{r} \times CA$ exprime la circonférence de la baſe du cylindre, *CA* ſon demi-axe, ſa ſolidité ſera

$\frac{c}{r} \times CA^3$, & celle de la ſphère $\frac{c}{r} \times \frac{2CA^3}{3}$; donc ſi toute la quantité de matiere étoit concentrée ou réunie au centre C, elle attireroit le corpuſcule P de toute la quantité $\frac{c}{r} \times \frac{2CA^3}{3PC^2}$, préciſément la même que quand la matiere eſt diſperſée autour du centre & compoſe une ſphère. *

Les ſphères n'attirent donc, en raiſon inverſe du quarré de la diſtance à leur centre, que parce que leurs parties attirent de même en raiſon inverſe du quarré de leurs diſtances particulieres; & c'eſt la même loi qui a lieu entre les parties & le tout.

LXIX. Si une ſphère eſt compoſée de couches inégalement denſes à des diſtances différentes, mais de la même denſité par tout à la même diſtance, chaque couche attirera comme ſi la matiere étoit réunie au centre, & l'attraction de toute la ſphère ſera comme dans une ſphère homogene, en raiſon compoſée de la di-

* On voit par-là que quelqu'ingénieuſe que ſoit l'explication, donnée par M. de Mairan, du mouvement journalier de la terre, elle eſt fondée ſur une fauſſe ſuppoſition; en effet, puiſque les parties poſtérieures d'une ſphère peſent d'autant moins que le centre, que les parties antérieures peſent plus, il y a compenſation; & il n'y a dans la ſphère d'autre centre de gravité que le centre de figure.

directe de la masse & de l'inverse du quarré de la distance au centre ; de maniere que nommant *P* la force attirante ou la force accélératrice qu'elle produit, *M* la masse du corps attirant, *D* sa distance du corps attiré, on aura $P = \frac{M}{DD}$.

LXX. Cette loi cependant n'a lieu exactement que pour les sphères ; si le corps attirant est un sphéroïde, les attractions particulieres ne peuvent plus se réunir en une seule force qui passe par le centre ; elles tirent alors, suivant une ligne d'autant plus écartée du rayon, que la figure de la masse attirante s'éloigne plus de la sphérique ; si cette ligne étoit dirigée au centre, la direction des graves ne seroit plus perpendiculaire à la surface du sphéroïde ; leur pesanteur ne seroit plus soutenue, & il n'y auroit point d'équilibre dans les fluides. Il doit donc résulter de toutes ces attractions particulieres une direction perpendiculaire à la surface du sphéroïde dirigée selon le rayon du cercle de courbure, & non pas dans tous les points selon le rayon de la figure.

Cependant dans les grandes distances, la différence des deux axes du sphéroïde devient nulle ou insensible, & l'on peut

dans

dans ces cas traiter le sphéroïde comme un globe parfait, sans commettre d'erreur assignable.

LXXI. Cette loi même des sphères commune à leur tout & aux parties qui le composent, se modifie diversement, lorsque les corps attirés sont à la surface ou dans l'intérieur des sphères.

Un corpuscule placé au centre, également attiré de toutes parts par la matiere de la sphère, n'auroit aucune gravité.

Placé en quel lieu que ce fût d'une sphère creuse, il demeureroit en repos au lieu où on l'auroit posé, & n'auroit de même aucune pesanteur.

Situé dans l'intérieur d'une sphère solide, il peseroit sur elle en raison de sa distance au centre, ou du rayon de la couche sur laquelle il seroit placé, de maniere qu'à la surface sa pesanteur seroit la plus grande de toutes, sçavoir en raison du demi-diametre de la sphère, & de la surface en haut dimi-nueroit en raison de l'augmentation du quarré de la distance.

Car, 1°, que les cordes HL & IK (*fig.* 24) interceptent les arcs infiniment petits HI & KL, on aura $HI. KL::$ $IP. KP$; donc les figures semblables dont HI & KL sont les diamétres,

ſeront comme IP^2 & KP^2, & exprimeront les maſſes attirantes. Les attractions de ces figures par rapport au corpuſcule P, ſeront donc $\frac{IP^2}{IP^2}$ & $\frac{KP^2}{KP^2}$, ou en raiſon d'égalité ; le corpuſcule P ſera donc également attiré de toutes parts vers la ſurface annullaire $HIKL$, & ſi cette ſphère eſt creuſe, deſtitué de peſanteur.

2°. S'il eſt placé dans une ſphère ſolide à quelque diſtance du centre, nous venons de voir que ce corpuſcule ne ſera nullement affecté par toutes les couches de la ſphère qui ſont au-deſſus de lui, parce qu'il en ſera également attiré de toutes parts. Sa peſanteur ſera donc l'effet des ſeules parties de la ſphère qui ſont au-deſſous de lui ou du globe intérieur qui le porte : or, nommant R le rayon de ce globe, ſa maſſe M ſera R^3, & ſon attraction $\frac{M}{DD}$ ſera $\frac{R^3}{R^2} = R$; c'eſt-à-dire, directement proportionnelle à la diſtance du corpuſcule au centre.

3°. Plus donc le corpuſcule remontera vers la ſurface, plus il ſera attiré en raiſon de l'augmentation de ſa diſtance au centre ; & à la ſurface ſa peſanteur ſera directement comme le rayon de la ſphère entiere, ou la plus grande de toutes : car

alors toutes les parties de la ſphère ſont efficaces, & l'attraction totale étant comme le cube du rayon de la ſphère entiere, diviſée par le quarré de ce rayon, elle eſt en derniere analyſe en raiſon de ce rayon.

4°. Et ſi le corpuſcule s'éloigne, la maſſe *M* du corps attirant ſera conſtante & ſon attraction $\frac{M}{DD}$ ſera $\frac{1}{DD}$, ou continuellement proportionnelle au quarré de la diſtance inverſe de ce corpuſcule, & cette loi s'obſervera réguliérement juſqu'aux limites de l'eſpace.

LXXII. Il ſuit de ces principes qu'un corpuſcule placé ſur la ſurface de la terre, & touchant une ſphére d'un pied de diamètre de même denſité que la denſité moyenne de la terre, ſera porté vers cette ſphère par une force qui ſera à ſa peſanteur vers la terre comme le diamètre de cette ſphère eſt au diamètre de la terre, ou comme 1 à 41083200 pieds environ, ce qui ſeroit plus de quarante millions de fois moindre que ſa peſanteur qui eſt ſi petite, & par conſéquent inobſervable.

Deux globes pareils, chacun d'un pied de diamètre, & diſtans l'un de l'autre de deux pieds ſeulement, ſi on n'a égard à l'accélération que pendant une ſeconde, & qu'on traite le mouvement comme

uniforme pendant le reſte du temps, mettroient plus d'un mois pour s'approcher en vertu de leur attraction mutuelle, quand même elle ne ſeroit point abſorbée par celle de la terre, qu'il n'y auroit ni air ni frottement, & que rien ne s'oppoſeroit à leur approximation ; car les eſpaces étant comme les forces dans des temps égaux, & les corps parcourant 15 pieds en une ſeconde par la force attractive de la terre, on aura 41083200. 1 :: 15. $x = \frac{15}{41083200} = \frac{1}{2738880}$, & tel ſera l'eſpace parcouru dans une ſeconde par l'une des ſphères vers l'autre ſuppoſée fixe: or, dans trente jours il y a 2592000″, donc ce mouvement reſtant uniforme, on aura 1. 2592000 :: $\frac{2}{2738880}$. $x = \frac{2592000}{2738880} \times 2$, ce qui ne vaut pas deux pieds ; donc ſi on a égard au frottement, qui eſt le tiers du poids, ou égal à $\frac{41083200}{3}$, & par conſéquent immenſe en comparaiſon de la tendance vers la ſphère, on verra que les ſphères les plus polies, poſées ſur le plan le plus uni, ne pourront s'approcher de la plus petite quantité dans le temps le plus long.

Par la même raiſon, les corps légers qui voltigent auprès de nos édifices les plus maſſifs, ſeront ſi peu attirés par ces

masses en comparaison de leur pesanteur ou tendance vers la terre, que la diagonale qu'ils devront suivre pour satisfaire à ces deux forces, ne différera de la verticale que d'une quantité inobservable.

Cependant cette attraction des corps placés sur la surface de la Terre, ne seroit pas insensible, si on la recherchoit dans des corps, des montagnes isolées, par exemple, dont les masses eussent quelque proportion avec la masse entiere de la Terre; c'est ce que Newton a calculé, & ce que MM. *Bouguer* & *de la Condamine* ont vérifié dans leur voyage au Pérou. La montagne *Chimboraco* attiroit le plomb qui pend au fil des quarts de cercles qui servent aux observations astronomiques, en lui faisant faire un angle de 7 à 8 secondes; & si le calcul fondé sur la grosseur de la montagne, donnoit une plus grande dévarication, c'étoit en la supposant homogène, au lieu que cette montagne ayant été un volcan, elle a nécessairement beaucoup de cavités & moins de matiere que ne comporte son volume.

LXXIII. Puisque la vitesse accélératrice ou la chûte initiale d'un corps vers le corps qui l'attire, est en raison composée de la masse du corps attirant

& de l'inverse du quarré de la distance entre les centres des deux corps, ou que $p = \frac{m}{dd}$, si l'on nomme u la vitesse, on aura aussi $p = \frac{uu}{d}$ lorsque le corps attiré se meut autour du corps attirant, & parce que $uu = \frac{dd}{tt}$, on aura $p = \frac{uu}{d} = \frac{d}{tt}$, & $\frac{m}{dd} = \frac{d}{tt}$, ou $m = \frac{d^3}{tt}$; c'est-à-dire, que, si un corps circule autour d'un autre, *la masse du corps attirant est comme le cube de la distance qui est entre le centre des deux corps, divisé par le quarré du temps périodique de celui qui circule.*.

LXXIV. Ce théoreme nous donne un moyen sûr de peser les Astres. Si l'on fait la distance moyenne de la Terre au Soleil de 1000 parties égales, la distance de Venus au centre de cet astre est de 723 de ces parties, & le temps de sa révolution de 19414160″.

La distance du quatriéme Satellite de Jupiter, au centre de cette Planète, est de 12, 4775 de ces parties, & son temps périodique de 1441929″.

La distance du quatriéme Satellite de Saturne au centre de cette Planète est de 8, 5107; & le temps de sa révolution de 1377674″.

Enfin la distance de la Lune au centre

de la Terre eſt de 3, 054 de ces mêmes parties, & le temps de ſa révolution moyenne de 2360580″.

Si donc on prend les cubes de ces diſtances, & qu'on les diviſe reſpectivement par les quarrés des temps périodiques, les quotiens exprimeront *les maſſes de ces corps centraux, & ſeront comme 10000; 9,306; 3, 250; 0, 0512; 0; 0023, pour le Soleil, Jupiter, Saturne, la Terre & la Lune reſpectivement.*

En effet, le ſecond Satellite de Jupiter eſt beaucoup plus éloigné de lui, que la Lune ne l'eſt de la Terre, à peu-près dans la raiſon de 3 à 2, & il ſe meut dans une orbite plus grande à proportion. Il finit ſa révolution en trois jours treize heures, ce qui eſt moins que la ſeptiéme partie du temps périodique de la Lune autour de la Terre. Si donc il deſcendoit plus près de Jupiter, dans la raiſon de 3 à 2, & faiſoit ſa révolution à la même diſtance que celle de la Lune à la Terre, il faudroit qne ſa viteſſe augmentât & fût encore beaucoup plus grande que celle de la Lune, par cette nouvelle raiſon. Il faudroit par conſéquent qu'il éprouvât une plus grande force centripète que la Lune pour balancer & ſoutenir une ſi

grande force centrifuge ; & comme la pesanteur à même distance vient de la quantité de matiere du corps attirant, il est nécessaire que Jupiter ait beaucoup plus de masse que la Terre.

Mercure fait de même sa révolution autour du Soleil dans un temps plus de trois fois moindre que celui de la révolution de la Lune autour de la Terre, & se meut dans une orbite 140 fois plus large. Il auroit une vitesse encore plus grande, s'il se mouvoit autour du Soleil à une distance égale à celle de la Lune à la Terre ; il éprouveroit donc aussi une force centripète d'autant plus grande, ce qui indique dans le Soleil une quantité de matiere beaucoup plus grande que celle de la Terre, & cela dans les rapports que nous avons déterminés.

LXXV. Les quantités de matiere contenues dans ces corps, étant déterminées, si on les divise par les quarrés des diamètres de ces Astres, lesquels diamètres sont dans le *Soleil*, *Jupiter*, *Saturne* & la *Terre*, comme 10000, 997, 791, 109 respectivement, les quotiens seront *comme les poids d'un même corps sur les surfaces de ces Astres ; c'est-à-dire, comme 10000, 936, 519, 431, 146, pour le*

Soleil, Jupiter, Saturne, la Terre & la Lune auſſi reſpectivement. Par où il paroît que la peſanteur vers ces corps très inégaux entr'eux, approche à leurs ſurfaces d'une façon très-ſurprenante de l'égalité; de maniere que la peſanteur à la ſurface de Jupiter, n'eſt gueres plus du double de la peſanteur à la ſurface de la Terre, quoiqu'il ſoit plus de 900 fois plus gros que cette Planète, & qu'à la ſurface de Saturne, la peſanteur n'eſt qu'environ $\frac{1}{4}$ plus grande que la peſanteur des corps terreſtres à la ſurface de la Terre, quoique le diamètre de Saturne ſoit de 700 fois plus grand que celui de la Terre; ce qui indique une plus grande denſité dans la Terre que dans ces Planètes.

Galilée a démontré que les efforts du poids des corps pour rompre l'adhéſion de leurs parties, augmentant en raiſon quadruplée de leurs longueurs, & leurs forces de cohéſion en raiſon triplée ſeulement des mêmes longueurs, il y a néceſſairement des limites que les ouvrages de l'art & de la nature ne peuvent ſurpaſſer en grandeur. D'où il ſuit que ſi la même loi de cohéſion a lieu ſur la Terre & dans les Planètes pour joindre leurs parties, il a fallu que la peſanteur fût la

même à peu-près à la ſurface de tous ces globes ; ce qui montre que ce n'eſt pas ſans deſſein que la loi du quarré a été ſuivie, puiſqu'elle ſeule rapproche ſi fort de l'égalité la peſanteur ſur des corps auſſi inégaux.

LXXVI. Les denſités étant comme les quantités de matiere diviſées par les volumes, ſi on diviſe les quantités de matiere déterminées (*n.* 74.) par les cubes des diamêtres, ou, ce qui eſt le même, les poids trouvés dans l'article précédent par les ſimples diamètres, on aura les *denſités reſpectives du Soleil, de Jupiter, Saturne, la Terre & la Lune reſpectivement, comme les nombres 10000, 9385, 6567, 39539, & 48911.*

Il paroit par ce réſultat, que les Planètes les plus proches du Soleil, ſont les plus denſes, ce qui eſt en ſoi très-convenable, & ce qui les met en état de ſoûtenir la grande chaleur de cet Aſtre. Tout languiroit ſur notre Terre, & l'eau y ſeroit perpétuellement glacée, ſi elle eût été miſe à la place de Saturne ; le froid exceſſif qu'elle y eût éprouvé, eût détruit en peu de temps toutes nos plantes & tous les animaux. Tout y ſeroit dans une efferveſcence qui détruiroit tout principe

de vie, & feroit évaporer tous les fluides, ſi ſans augmenter ſa conſiſtance, elle eût été placée à la diſtance de Mercure. Mercure $\frac{8}{3}$ plus près du Soleil que nous, y éprouve $\frac{64}{9}$, ou, à peu-près, ſept fois plus de chaleur, que celle que nous éprouvons dans les plus brûlants étés, & cette chaleur ne differe pas de celle de l'eau bouillante. Une variation beaucoup moins conſidérable dépeupleroit la zône torride, ſi, ſans prendre la place de Mercure, la Terre s'approchoit du Soleil plus qu'elle ne fait; il en arriveroit autant aux zônes tempérées, ſi elle s'en éloignoit. La loi de la nature, que l'obſervation a fournie, met donc toutes choſes à leurs places, & décele en tout la ſageſſe du Créateur.

LXXVII. Les maſſes des Planètes & du Soleil étant trouvées, on peut comparer les actions du Soleil & de Jupiter ſur Saturne, lorſque ces deux Planètes ſont en conjonction. Les diſtances du Soleil à Saturne & à Jupiter étant dans la raiſon de 954 à 520, la diſtance de Saturne à Jupiter lors de la conjonction, eſt $954 - 520 = 434$, & l'action de Jupiter ſur Saturne eſt alors à celle du Soleil ſur la même Planète, comme la maſſe

de Jupiter divisée par le quarré de sa distance à Saturne, à la masse du Soleil, divisée par le quarré de sa distance à la même Planète ; c'est-à-dire, comme $\frac{9,305}{188356}$ à $\frac{10000}{900116}$, ou comme 45 à 10000, ou 1 à 222.

Cette action de Jupiter sur Saturne est dans le même sens que la pesanteur de cette Planète, & l'augmente de la $\frac{1}{222}$ partie, ce qui est fort considérable; d'où il suit que le mouvement de Saturne doit à tout moment être plus infléchi dans le temps de la conjonction, que si Jupiter n'agissoit pas sur lui, & doit par conséquent arriver plutôt à l'angle droit avec son rayon vecteur ; ce qui place l'aphélie de cette Planète dans un point plus occidental, & le fait rétrograder. Or, ce fait est conforme aux observations Astronomiques, qui nous apprennent que depuis 1694 jusqu'à la fin de 1708, l'aphélie de Saturne rétrograda d'environ 33′, & que ces deux Planètes se trouverent en conjonction en 1703, & ne se trouverent à la distance de 90°. que 5 ans après, à cause de la lenteur de leur cours.

LXXVIII. Cette force de Jupiter sur Saturne ne trouble pas seulement la position de son aphélie, elle retarde encore

le mouvement en long de cette Planète dans un grand nombre d'années : car, quoiqu'il paroiſſe d'abord que, ſi Jupiter ralentit le mouvement de Saturne, lorſqu'il va à la conjonction, il doit l'accélérer enſuite, lorſqu'il s'en éloigne après la conjonction. Cependant il en eſt tout autrement, & ces inégalités ne ſe compenſent pas mutuellement de part & d'autre, à raiſon des configurations particuliéres des orbites de ces deux Planètes.

L'aphélie de Saturne étant à 29° du Sagittaire, plus avancé de 2s 19° que celui de Jupiter, qui eſt à 10° de la Balance, comme dans la Figure 25 ; quand Jupiter va de ſon aphélie *C* à ſa conjonction *D*, avec Saturne, placé en *A* à ſon aphélie, il ralentit pendant tout ce temps le mouvement de Saturne, & depuis *D* juſqu'en *B* il l'accélere. Mais comme *CD* eſt plus long que *DB*, qu'il eſt parcouru avec moins de viteſſe, & que *E* eſt de tous les points de l'orbe de Jupiter le plus près de *A*, lieu où l'action de Jupiter eſt la plus grande, il eſt évident par ces trois raiſons que Jupiter retardera Saturne plus fortement & plus long-temps qu'il ne l'accélérera.

Il eſt vrai que ſi la conjonction arrive

en *F* & *P* près du périhélie de Saturne, Jupiter emploiera moins de temps de *B* en *F* que de *F* en *C*, qu'en parcourant *F C* il paſſera par le point *G* le plus près de *P*, où ſon action eſt la plus grande, & qu'ainſi la ſomme des accélérations l'emportera alors ſur celle des retardemens; ce qui paroîtroit devoir faire compenſation avec ce qui ſe paſſe dans l'autre côté de l'orbe.

Mais comme les lieux moyens participent à ce qui arrive dans les cas extrêmes, & que la portion *L A M* de l'ellipſe de Saturne eſt plus grande que *MPL*, qu'elle eſt d'ailleurs parcourue avec moins de viteſſe, ce ſera du côté de l'aphélie que ſe fera dans un long-temps le plus grand nombre de conjonctions; & parce que là la ſomme des retardements eſt plus grande que celle des accélérations, il ſe trouvera qu'en total, & après un grand nombre de révolutions, le mouvement moyen de Saturne ſera en effet ralenti, comme les Aſtronomes l'ont obſervé.

Il eſt vrai encore, par la même raiſon, que ce ſera dans la partie *L A M* que ſe fera le plus grand nombre d'oppoſitions, & que dans celles-ci la ſomme des accélérations eſt plus grande que celle des

retardemens; mais comme la diſtance eſt plus grande dans la raiſon de 14 à 4, la force de Jupiter ſera plus petite dans la raiſon de 16 à 196, ou de 1 à 12 $\frac{1}{4}$; ce qui diminuera, mais ne détruira pas l'effet des retardemens, qui eſt effectivement très petit, & que les Aſtronomes eſtiment de 2′ en 100 ans.

Par la même raiſon les Satellites de Jupiter & de Saturne ſeront ſenſiblement troublés; il y a même apparence qu'à cauſe de leur grande proximité, ceux de Jupiter ſe troublent les uns les autres; & c'eſt de l'action de ces deux Planètes que M. Clairaut a déduit à 20 jours près, le moment de l'apparition de la Comète de 1759.

LXXIX. Dans le temps que Saturne eſt troublé dans ſon mouvement par l'action de Jupiter, on n'apperçoit point d'altération dans celui de cette derniere Planète; c'eſt que la maſſe de Saturne eſt trop petite pour opérer des effets ſenſibles à cet éloignement.

Saturne attire Jupiter & le Soleil par des forces qui ſont comme les quarrés des nombres 954 & 434; mais ce n'eſt que par la différence de ces forces ou de ces quarrés, qu'il trouble le mouvement de

Jupiter en l'éloignant du Soleil. S'il attiroit ces deux Aſtres également, leurs diſtances & leurs ſituations ne ſeroient point troublées, & tout ſe paſſeroit dans Jupiter, comme ſi Saturne n'agiſſoit point ſur lui. La force perturbatrice de Saturne ſur Jupiter, eſt donc à ſon action ſur le Soleil, dans la raiſon de la différence des quarrés de 954 & de 434 au quarré de ce dernier nombre, ou à peu-près comme 72 à 19.

Or, cette tendance = 19 du Soleil vers Saturne, eſt à la peſanteur de Jupiter ſur le Soleil comme $\frac{3,250}{954^2}$ à $\frac{10000}{520^2}$, ou comme 19 à 19509; donc en compoſant ces raiſons, la force perturbatrice de Saturne ſur Jupiter eſt à la peſanteur de celui-ci ſur le Soleil comme 72×19 à 19×19509, ou comme 1 à 2703. La peſanteur de Jupiter ſur le Soleil n'eſt donc diminuée par l'action de Saturne que de ſa $\frac{1}{2703}$ partie ; ce qui eſt abſolument inſenſible, & ne doit produire aucun effet obſervable ſur l'aphélie de Jupiter.

Par la même raiſon, le mouvement en long de cet Aſtre ne ſera point troublé par l'action de Saturne, malgré la configuration particuliere de leurs orbites ;

car

car le ralentiſſement de Saturne par Jupiter n'étant que de 2′ en cent ans, & la maſſe de Saturne n'étant qu'environ le tiers de celle de Jupiter, l'altération de la viteſſe de Jupiter ne pourroit être de plus de 40″ en cent ans, & ce ſeroit en accélération.

LXXX. Si Saturne a ſi peu de force pour troubler Jupiter dans ſon cours, à plus forte raiſon ne pourra-t-il déranger le cours des Planètes inférieures; Jupiter même, dont la maſſe eſt plus grande, & l'éloignement moindre, ne peut y avoir d'effets ſenſibles; c'eſt ce dont il eſt aiſé de ſe convaincre en calculant & déterminant le plus grand de tous ces troubles, ſavoir, celui que cette Planète opére ſur Mars.

Lorſque Mars ſe trouve dans la même ligne avec Jupiter & le Soleil, les diſtances de Jupiter à Mars & au Soleil, ſont comme 3677 & 5201, & les forces avec leſquelles Jupiter attire ces Aſtres, ſont en raiſon inverſe des quarrés de ces nombres, & à peu-près comme 2 à 1.

La différence de ces deux nombres, laquelle eſt égale au dernier, ou à la tendance du Soleil ſur Jupiter, exprime la quantité dont Jupiter trouble la peſanteur

de Mars ſur le Soleil : or, cette tendance 1 du Soleil vers Jupiter, eſt à la peſanteur de Mars ſur le Soleil, comme 9, 305, maſſe de Jupiter eſt à 10000 maſſe du Soleil directement, & réciproquement comme les quarrés des diſtances de ces Planètes au Soleil ; c'eſt-à-dire, comme $\frac{9,305}{\overline{5201}^2}$ à $\frac{10000}{\overline{1523}^2}$, ou comme 1 à 12512.

Donc la force perturbative de Jupiter ſur Mars eſt à la peſanteur de Mars ſur le Soleil, comme 1 à 12512 ; & la force de Jupiter, pour troubler le mouvement de Mars, n'eſt que la $\frac{1}{12512}$ partie de la peſanteur de Mars ſur le Soleil ; ce qui eſt tout-à-fait inſenſible même dans un aſſez grand nombre de révolutions.

LXXXI. On voit donc que tout dans l'origine a été arrangé de maniere que les actions des Planètes les unes ſur les autres, à l'exception de celle de Jupiter ſur Saturne à la conjonction, ſont trop petites pour pouvoir être remarquées dans une ou pluſieurs révolutions ; & qu'ainſi les ellipſes qu'elles décrivent autour de leur centre de gravité, par la force du Soleil, doivent paroître immobiles pendant un très grand laps de tems, & ſuivre en tout les regles que nous avons

déterminées dans le chapitre précédent, comme si chacune se mouvoit seule autour du Soleil.

LXXXII. Cependant, quoique l'action de Jupiter, sur les Planètes inférieures, soit telle qu'on n'en puisse voir les effets dans un grand nombre de révolutions, elle ne doit point être négligée lorsqu'il s'agit d'examiner ce qu'elle est capable de produire dans une longue suite de siécles; c'est ce qui donne l'explication d'un phénomène aujourd'hui bien constaté, je veux dire la lente progression des aphélies des Planètes inférieures, selon l'ordre des signes.

En effet, Jupiter attirant à lui ces Planètes inférieures, diminue un peu leur pesanteur sur le Soleil. Celle-ci diminue donc dès-lors plus rapidement que dans la raison inverse du quarré de la distance vers le lieu des conjonctions, où la force de Jupiter est la plus grande, & il s'en faut toujours un peu à chaque révolution complette, que ces Astres n'aient atteint l'angle droit de leurs mouvemens & de leurs rayons vecteurs, comme elles eussent fait, si la loi du quarré n'eût point été troublée; ce qui place le lieu de cet angle droit, ou l'aphélie un peu plus à

l'orient, qu'il n'auroit dû l'être, & produit ſa lente progreſſion ſelon l'ordre des ſignes, comme il a été expliqué *n*°. 51.

Quand Jupiter & la Planète inférieure ſont en quadrature, l'action du premier ſur la ſeconde ſe décompoſe en deux, l'une dirigée par une ligne tirée du centre de cette Planète au centre du Soleil, l'autre parallele à la ligne qui joint les centres du Soleil & de la Planète attirante ou de Jupiter; & cette ſeconde force ne troublant pas le mouvement de la Planète attirée, parce qu'elle attire le Soleil également & dans une ligne parallèle; la premiere augmente la peſanteur de la Planète ſur le Soleil, courbe, infléchit davantage ſon mouvement, lui donne une diſpoſition pour couper plutôt le rayon vecteur à angle droit, & fait par là retrograder l'aphélie (*n* 51.)

Mais comme la force perturbatrice eſt plus grande vers la conjonction, l'aphélie avance plus qu'il ne rétrograde, & il n'y a que cet avancement qui s'accumule, qui laiſſe des veſtiges après lui, & devienne ſenſible après une très-longue ſuite de ſiécles & de révolutions.

Si l'on regarde donc alors l'orbe de la Planète comme ſolide, & qu'on lui donne

de petites oſcillations alternatives d'orient en occident, quand la Planète eſt dans les quadratures d'occident en orient, quand elle eſt dans les ſiſygies & un peu plus fortes que les premieres, on concevra que la Planète parcourt cette ellipſe mobile, comme ſi ſon mouvement n'avoit point été troublé, & qu'à cauſe du mouvement de l'orbe vers l'orient, elle n'arrivera à ſon aphélie, que dans un point plus oriental.

Lorſque remontant de la quadrature à la conjonction, ſa peſanteur ſur le Soleil diminuera & fera allonger ſon rayon vecteur ; elle ne s'élévera pas pour cela au-deſſus de ſon orbite, parce que, par la rétrogradation de l'aphélie dans la quadrature, l'orbe ſera venu au-devant de la Planète pour lui préſenter des points plus diſtants du foyer, & s'accommoder à l'allongement de ſon rayon vecteur, cauſé par la diminution actuelle de ſa peſanteur.

Près de la conjonction, l'orbe fuira vers l'orient, y tranſportera les plus longs rayons vecteurs, & la Planète, qui diminue toujours de poids & qui s'avance par ſon mouvement circulaire vers l'orient, y trouvera dans l'orbe même des diſtances ou rayons vecteurs proportionnés

à la diminution de sa pesanteur ; ses distances s'accourciront près de la quadrature, mais la rétrogradation de l'orbe lui présentera alors des rayons vecteurs plus petits & plus près du foyer.

Par où l'on voit que, malgré ce trouble insensible des Planètes & la lente progression de leurs aphélies, on peut toujours les regarder comme mûes dans des ellipses qui, mûes elles-mêmes, s'inclinent sur leurs foyers, & se plaçent de maniere que ces grands corps ne quittent jamais leurs circonférences.

LXXXIII. Jusqu'ici nous avons considéré les Planètes comme animées d'un mouvement de projection imprimé une fois, & d'une pesanteur continuelle sur le Soleil, variable dans le rapport renversé du quarré de la distance à cet Astre, & nous avons vu, qu'en conséquence de ces deux forces, les Planètes doivent décrire des ellipses excentriques, parcourir des aires proportionnelles aux temps, qui, dans les différentes Planètes, sont & doivent être comme les racines quarrées des cubes de leurs distances moyennes, de même que les vitesses moyennes en raison inverse des racines quarrées de ces distances, & qu'à l'exception de l'infléxion

du mouvement de Saturne & de la lente progreſſion des aphélies des Planètes inférieures, ces propriétés de leurs cours ne doivent point être altérées par leurs actions réciproques.

Mais nous n'avons conſidéré alors que la gravitation des Planètes vers le Soleil, ſans faire attention à celle du Soleil même ſur ces Planètes.

Or, puiſque l'attraction eſt réciproque, cette ſuppoſition eſt illégitime, & il a fallu que *Newton* s'aſſurât que cette gravitation du Soleil vers les Planètes ne dérangeoit rien dans les mouvements ou phénomènes de ces dernieres; c'eſt ce qu'il reſte à expliquer.

Qu'on conçoive que Mercure ait d'abord été placé à une certaine diſtance du Soleil, & qu'il ait été abandonné à la force attractive de cet Aſtre, il aura dû être porté vers le Soleil par un mouvement accéléré, & cet Aſtre ſe ſera porté ſur Mercure par l'attraction de cette Planète, de maniere que la diſtance étant la même, les viteſſes accélératrices auront été comme les maſſes attirantes, ou réciproquement comme les maſſes attirées, & ces deux corps ſe ſeront rencontrés à leur commun centre de gravité,

qui, à cauſe de la lourde maſſe du Soleil, aura été très-près de ſon centre de figure.

Mais ſi dans le premier moment de leur chûte, ces deux corps ont reçu un mouvement tranſverſal ou projectile dans une proportion de viteſſe ſuffiſante, ils auront été ſoutenus à leurs diſtances, & auront été forcés de circuler autour de leur centre commun de gravité peu diſtant, comme nous l'avons obſervé, du centre même du Soleil.

Si la force de projection eût été celle que Mercure auroit acquiſe en tombant de la moitié de ſa diſtance au centre commun de gravité, & que ſa direction eût été perpendiculaire à la ligne qui joint les centres de Mercure & de gravité, il eût décrit un cercle autour du centre de gravité, comme ſi le Soleil eût été immobile; & cet Aſtre, par la même raiſon, eût décrit un pareil cercle autour de ce centre.

Si donc dans ces deux corps la projection a été celle qui eſt néceſſaire pour faire décrire une ellipſe, ils ont dû décrire chacun autour du centre de gravité des ellipſes pareilles & ſemblables à celle que Mercure eût décrite autour du Soleil, ſi celui-ci fût reſté immobile; &

tout continuera de se passer, comme si le Soleil n'étoit pas attiré.

En effet, 1°, si Mercure & le Soleil sont projettés avec des vitesses réciproques à leurs masses, ou, ce qui est le même, proportionnelles à leurs distances, du centre commun de gravité, ils se mouvront dans le même temps autour de ce centre. Leurs chûtes initiales ou les sinus verses des arcs qu'ils décriront, seront comme les masses attirantes à cause de la même distance entre ces Astres, & par conséquent réciproques à leurs masses, ou en raison de leurs distances au centre de gravité. Par-là leurs arcs ou tangentes, parcourues dans un temps donné, leurs sinus verses, leurs rayons vecteurs seront en proportion, & par conséquent les aires dont ils sont les côtés homologues, c'est-à-dire, les triangles infiniment petits, parcourus en même-temps par leurs rayons vecteurs autour du centre de gravité, seront des figures semblables, de même que les courbes que ces aires ou triangles composent.

2°. Si l'on suppose que la vitesse de Mercure autour du Soleil supposé fixe eût été à sa vitesse de projection autour du Soleil mobile, en raison sou-doublée de

la diſtance entre les centres des deux Aſtres à la diſtance de Mercure au centre commun de gravité, les arcs décrits en ces deux cas dans des temps qui ſuivroient la raiſon soû-doublée de ces intervalles, ſeroient l'un à l'autre (*théorie de Galilée*) en raiſon des rayons vecteurs ; c'eſt-à-dire, en raiſon de la diſtance des centres des deux corps à la diſtance de Mercure au centre commun de gravité.

De plus Mercure, également attiré par le Soleil, ſoit fixe, ſoit mobile, eût eu dans ces deux cas des chûtes initiales égales en temps égaux, & en temps inégaux en raiſon des quarrés des temps, & par conſéquent en raiſon de la diſtance entre les deux Aſtres à ſa diſtance particuliere au centre de gravité. Les ſinus verſes dans ces deux cas ſeroient donc comme les arcs & comme les rayons vecteurs, dans des temps pris en raiſon donnée; & par conſéquent les triangles infiniment petits qu'ils compoſent, euſſent été des figures ſemblables. Il en ſera de même dans les temps ſuivants, & les courbes qui ſont la réunion de ces triangles, euſſent été ſemblables auſſi.

Donc en ce cas Mercure décrira autour du Soleil ſuppoſé mobile, une ellipſe pa-

reille à celle qu'il eût décrite autour du Soleil fixe, & il en sera de même de Venus, de la Terre & des autres Planètes; donc, puisqu'autour du Soleil fixe, ces Astres nous eussent donné les mêmes phénomènes que l'observation découvre, il en sera de même autour du Solell mobile, & la réciprocité de la gravitation ne nuit point à ces phénomènes. *

LXXXIV. Ce mouvement du Soleil autour du centre commun de gravité, ne sera pas à la vérité fort régulier, lorsque plusieurs corps feront autour de lui leurs révolutions. Vénus & Mercure, par exemple, attirant cet Astre, tantôt du même côté, tantôt de côtés différents, selon la diversité de leurs situations, y produiront des altérations & des irrégularités qui dépendront, & du mouvement acquis précédemment, & du trouble actuel; mais la masse, conséquemment la

* *Toute la différence qu'il y aura, c'est que ces corps finiront leurs révolutions autour du centre de gravité en moins de temps que si l'un eût fait sa révolution autour de l'autre en repos à la même distance & avec la même force centripète, parce que l'orbite décrite autour du centre de gravité étant moindre que celle qui seroit décrite par l'un d'eux autour de l'autre en repos, & lui étant semblable, elle doit, la distance demeurant la même, être décrite dans un temps moindre, quoique toujours dans le rapport observé par Képler dans les différentes Planètes.*

force attractive du Soleil, est si grande, en comparaison de celle de ces deux corps, que les agitations de cet Astre seront fort petites, & son centre de gravité fort peu distant de son centre de figure.

Quand les Planètes seroient toutes du même côté, & placées sur un même rayon, *Newton* a démontré qu'à peine le centre commun de gravité de tous les Astres circumsolaires seroit éloigné du centre du Soleïl de la quantité d'un de ses diamètres. La masse du Soleil étant à celle de Jupiter à peu-près commme 1067 à 1, la distance du centre du Soleil au centre de gravité de ces deux Astres est la $\frac{1}{1067}$ partie de la distance de Jupiter au même centre; donc la distance de Jupiter au centre du Soleil étant au demi-diamètre de cet Astre dans une raison un peu plus grande, & à peu-près comme 1115 à 1, le centre commun de ces deux masses ne sera que fort peu au-dessus de la surface du Soleil. Au contraire la masse du Soleil étant à celle de Saturne, à peu-près comme 3021 à 1, & la distance de Saturne au centre du Soleil étant au demi-diamètre de cet Astre dans une raison un peu moindre, le centre de gravité de ces deux masses tombe en dedans du Soleil

à quelque diſtance de ſa ſuperficie ; d'où il ſuit que le rapport de la maſſe du Soleil à celle de chaque Planète inférieure à Jupiter, devenant beaucoup plus grand, & le rapport entre les diſtances de ces Planètes & de la ſurface du Soleil à ſon centre, beaucoup moindre, le centre commun de gravité de cet Aſtre & de chaque Planète inférieure, doit continuellement ſe rapprocher du centre de cet Aſtre, & par conſéquent toutes les Planètes étant placées du même côté ſur le même rayon, le centre commun de peſanteur de toutes ces maſſes, ſeroit à peine éloigné de la ſurface du Soleil d'une quantité égale à ſon demi-diamèttre.

Dans les autres poſitions des Planètes, qui ſont leurs poſitions habituelles, ce centre tombera à une beaucoup moindre diſtance de la ſurface du Soleil ; il tombera tantôt d'un côté, tantôt d'un autre, de maniere qu'en prenant un point du milieu entre des ſituations ſi peu différentes, ce point doit être regardé comme le vrai centre, comme un centre immobile, dont celui du Soleil ne peut jamais être bien éloigné, & que l'on peut aiſément, & ſans erreur ſenſible, confondre avec lui.

Ainſi, quoique le globe terreſtre reçoive une impreſſion de chaque puiſſance qui met en mouvement nos projectiles, & qu'il ſoit, pour parler exactement, un peu agité & déplacé par ces puiſſances: cependant nous le conſidérons comme en repos, négligeant, avec raiſon, des actions ſi peu conſidérables, & qui ont ſur lui ſi peu ou de ſi petits effets.

LXXXV. Cependant ce dérangement du Soleil, cauſé par l'attraction des Planètes a, tout petit qu'il eſt, ſon utilité particulière; il eſt cauſe que les Planètes, qui ſe troublent déja ſi peu dans leurs mouvements elliptiques, le font encore moins qu'elles ne feroient, ſi cet Aſtre étoit immobile; car ſi Jupiter ſe trouve à égale diſtance du Soleil & de Mercure, il les attirera l'un & l'autre avec une égale viteſſe accélératrice, & par conſéquent la ſituation de Mercure à l'égard du Soleil ne ſera pas troublée, au lieu qu'elle le ſeroit, ſi le Soleil reſtant immobile, Mercure ſeul s'approchoit de Jupiter.

A la vérité, lorſque Jupiter n'eſt point à égale diſtance du Soleil & de Mercure, ces deux corps ne ſe portent pas également vers lui, & le moins éloigné eſt le plus at-

tiré ; mais dans ce cas-là même, le trouble de Mercure, que nous avons trouvé si petit, tant à cause de l'extrême disproportion de la masse du Soleil avec celle de Jupiter, que parce que l'éloignement de Jupiter est si grand que la distance de Mercure au Soleil est nulle ou insensible en comparaison, & qu'il est nécessairement diminué par les effets contraires de Jupiter dans ses situations opposées, devient moins considérable encore que si Mercure seul étoit agité ; dans ce dernier cas, le trouble seroit égal à toute la force qui affecte Mercure, au lieu que dans le premier, qui est le cas de la Nature, il n'est que la différence des attractions si peu inégales entr'elles.

En faisant le même raisonnement sur les autres Planètes, on verra que la distance de Jupiter est si disproportionnée, que la différence des distances des Planètes par rapport à lui, est presqu'insensible, & que le trouble dès-lors si petit qu'il opére sur elles, est en quelque sorte rétabli, ou du moins beaucoup diminué par celui qu'il opére sur le Soleil, & qu'il en est de même des inégalités beaucoup moindres que se causent les Planètes inférieures entre elles ; que le dérangement continuel de

cet Aſtre entretient l'ordre de la Nature; que tout a été peſé & calculé dans l'origine; que comme l'énormité de la maſſe du Soleil, fait qu'il donne la loi au ſyſtême Planétaire, ſans permettre aux Planètes de ſe troubler beaucoup, ſa mobilité prévient ou diminue encore ces troubles; & qu'ainſi, *non-ſeulement les mouvements réguliers des Planètes doivent être déduits du principe de la gravité, mais que leurs moindres irrégularités ſont auſſi expliquées par ce principe.*

CHAPITRE VI.

Du Mouvement de la Lune & des autres Satellites.

LXXXVI. PUISQUE la Lune tourne autour de la Terre, que dans pluſieurs points de ſon orbite elle décrit autour de cette Planète des aires proportionnelles aux temps, & que dans les autres points elle s'écarte aſſez peu de cette regle, on doit en conclure qu'elle eſt à chaque inſtant animée d'une force centrale dirigée vers la Terre; & que ſi cette force n'étoit modifiée

modifiée par aucune autre, elle ſuivroit, à l'égard de la Terre, les mêmes loix, préciſément dans ſon mouvement & dans toutes les variations ou inégalités de ce mouvement, que les Planètes à l'égard du Soleil; c'eſt-à-dire, qu'elle décriroit une ellipſe immobile & réguliere au foyer de laquelle la Terre ſeroit placée; que dans les points correſpondans de cette ellipſe, elle auroit toujours une égale viteſſe, qu'il n'y auroit point d'inégalité dans le temps de pluſieurs de ſes révolutions conſécutives, ni de changement, ſoit dans l'excentricité de ſon orbite, ſoit dans la poſition de ſes apſides, ſoit dans l'inclinaiſon de ſon mouvement à l'écliptique & le lieu de ſes nœuds.

Mais les Aſtronomes ayant obſervé que le mouvement de la Lune n'eſt pas à beaucoup près ſi régulier, qu'il eſt au contraire ſujet à bien des variations, & à des variations fort ſenſibles, M. Newton en a conclu, qu'en même-temps que la Lune peſe ſur la Terre, elle eſt encore animée d'une force fort comparable à la premiere, dirigée vers le Soleil, & variable dans la raiſon renverſée des quarrés de ſes diſtances à cet Aſtre. Concluſion d'autant plus légitime, que la Lune

n'étant pas plus éloignée du Soleil que la Terre, il eſt néceſſaire qu'elle peſe ſur cet Aſtre auſſi bien que la Terre, & qu'il en réſulte des modifications ſenſibles dans ſon mouvement, à cauſe de l'énormité de la maſſe du Soleil & de ſa grande force attractive.

LXXXVII. Quelle que ſoit cependant la grande force du Soleil, s'il agiſſoit également ſur la Lune & ſur la Terre, & toujours dans la même ligne ou en lignes parallèles, cette action ſeroit toute employée à produire les mouvemens annuels de la Lune & de la Terre autour du Soleil, & n'auroit aucun effet ſur leurs actions mutuelles ni par conſéquent ſur le cours de la Lune autour du centre de gravité commun à ce Satellite & à la Terre. Il en ſeroit en ce cas, de la Lune & de cette Planète, comme de la Terre & de nos projectiles qui ne ſont point troublés dans la régularité de leurs mouvements à la ſurface de la Terre par l'action du Soleil; il en ſeroit alors de la Lune & de la Terre, comme ſi elles étoient dans un plan ſolide dont le Soleil attireroit toutes les parties avec la même viteſſe que celle avec laquelle il attire la Terre & la Lune.

Dans ce cas, tout le plan deſcendroit

vers le Soleil avec ces deux Aſtres, & parce que les mouvemens communs ne troublent pas les mouvements particuliers, les mouvemens reſpectifs de la Terre & de la Lune autour de leur centre commun de gravité, ſeroient les mêmes dans ce plan que s'il étoit en repos; & ſi ce plan recevoit le même mouvement annuel que la Terre & la Lune, il ſe mouvroit avec elles autour du Soleil, comme ſi elles n'avoient aucun mouvement particulier autour de leur centre commun de gravité. Dans cette hypothèſe de l'action toujours égale & toujours parallèle du Soleil ſur la Lune & ſur la Terre, ces deux Planètes tourneroient donc, & autour d'elles ou de leur centre commun, & autour du Soleil ſans aucun irrégularité.

Mais parce que la Lune eſt plus près du Soleil que la Terre, dans la moitié de ſon orbite, que dans l'autre elle en eſt à une plus grande diſtance, elle ſe trouve plus attirée que la Terre par le Soleil dans le premier cas, elle l'eſt moins dans le ſecond; d'où il réſulte néceſſairement des irrégularités dans les mouvements de la Lune, non par toute la quantité de force dont elle eſt attirée par le Soleil, mais

par la différence en excès ou en défaut dont elle est plus ou moins attirée que la Terre, d'autant que cette action du Soleil sur ces deux Astres n'est point partout dirigée selon les mêmes lignes ou selon des lignes parallèles, mais selon des lignes qui se croisent & s'entrecoupent au centre du Soleil.

LXXXVIII. Afin de voir comme le Soleil agit sur la Lune, & pour connoître les effets de cette action, supposons que les mouvemens de la Terre & de la Lune soient détruits. Alors ces deux Planètes n'étant plus soutenues à leurs distances par le contr'effort de leur force projectile ou centrifuge, descendroient toutes deux vers le Soleil. La Lune en conjonction plus attirée par cet Astre, tomberoit sur lui avec une plus grande vitesse que la Terre, & augmenteroit continuellement par l'excès de sa chûte, les rapports de ses distances à la Terre.

A l'opposition, la Lune plus éloignée que la Terre du Soleil, en seroit moins attirée, tomberoit sur lui avec moins de vitesse que la Terre, & verroit encore sa distance à ce globe continuellement augmentée. Cette augmentation de distance viendroit en ce cas de la Terre; mais

comme nous nous y ſuppoſerions immobiles, nous rapporterions tout cet éloignement à la Lune, qui peut en ce cas être conſidérée comme repouſſée par le Soleil, en ſuppoſant que cet Aſtre n'affecte point la Terre.

Si la Lune étoit dans ſes quadratures, la Lune & la Terre étant alors attirées toutes deux également ſelon des lignes qui font un angle au centre du Soleil, & dont la corde ou ſoûtendante eſt la diſtance de la Lune à la Terre, elles deſcendroient toutes deux vers ce centre ſelon ces lignes; elles s'approcheroient l'une de l'autre en s'approchant du Soleil; & l'effet de l'action de cet Aſtre ſeroit alors de porter la Lune vers la Terre, & d'en diminuer la diſtance.

Or, toutes les fois que le Soleil augmenteroit la diſtance de la Lune & de la Terre, s'il leur étoit permis de tomber vers lui, ſon effet eſt de tendre à les écarter, & de diminuer leur peſanteur l'une vers l'autre, lorſqu'à cauſe de leurs mouvemens circulaires, il ne vient point à bout de les faire tomber; donc *dans la conjonction & l'oppoſition, la peſanteur de la Lune ſur la Terre, eſt diminuée par l'action du Soleil.*

Toutes les fois que le Soleil diminueroit les distances de la Lune à la Terre, si ces Planètes tomboient sur lui, son effet, quand elles sont soutenues, est de tendre à les approcher, de pousser la Lune vers la Terre par une action latérale, & d'augmenter sa gravité vers cette Planète; donc *dans les quadratures, la Lune augmente de pesanteur sur la Terre par l'action du Soleil.*

Dans l'un & l'autre cas, on voit que ce n'est pas l'action totale du Soleil sur ces corps, qui trouble leurs mouvemens. Dans le premier cas, c'est la différence de ses actions sur ces Planètes, qui tend à les séparer l'une de l'autre à une plus grande distance. Dans le second cas, c'est la différence des directions de son attraction, qui tend à les approcher en agissant latéralement sur la Lune, & la pressant vers la Terre. L'autre partie de son action est beaucoup plus considérable, & n'a d'autre effet dans ces deux cas que de retenir ces deux Astres dans la révolution annuelle qu'ils font ensemble autour du Soleil.

LXXXIX. Dans les quadratures l'action du Soleil, oblique sur la Lune, se décompose donc en deux, l'une dirigée

ſelon le rayon de l'orbite de la Lune, qui paſſe par la quadrature, proportionnelle à ce rayon; & elle augmente la peſanteur de la Lune ſur la Terre; l'autre parallèle à la ligne qui joint les centres de la Terre & du Soleil, égale à l'action du Soleil ſur la Terre à cette diſtance, & ne ſert qu'à courber le mouvement projectile par lequel la Lune ſe meut avec la Terre annuellement autour du Soleil.

D'où il réſulte que l'augmentation de la peſanteur de la Lune ſur la Terre à chaque quadrature, eſt à la peſanteur de la Terre ſur le Soleil, comme la moyenne diſtance de la Lune à la Terre, à la moyenne diſtance de la Terre au Soleil, ou comme d à D.

Or la peſanteur de la Terre ſur le Soleil eſt à la peſanteur originaire de la Lune ſur la Terre (*n.* 73.) en raiſon de D à d, ou de la directe des diſtances, & de l'inverſe du quarré du temps périodique de la Terre autour du Soleil au quarré du temps de la révolution de la Lune autour de la Terre, ou comme $\frac{D}{T^2}$ à $\frac{d}{t^2}$.

Donc, en compoſant ces raiſons, l'augmentation de la peſanteur de la Lune par le Soleil, dans les quadratures, eſt à

ſa peſanteur naturelle, comme $\frac{D \times d}{T^2}$ à $\frac{D \times d}{t^2}$, ou en raiſon réciproque du quarré du temps de la révolution de la Terre autour du Soleil au quarré du temps périodique de la Lune autour de la Terre, ou comme t^2 à T^2.

Ces temps ſont connus, & ſont l'un de 365 jours 6 h. 9′ 14″, l'autre de 27 j. 7 h. 43′; & leurs quarrés ſont entr'eux comme 178, 73 à 1. D'où il ſuit que la *peſanteur de la Lune dans la quadrature, augmente de la $\frac{1}{178}$ partie de ſa peſanteur naturelle.*

XC. Dans les ſyſigies, la diminution de la peſanteur de la Lune eſt égale à la différence des quarrés de la diſtance du centre de la Terre au centre du Soleil & de la diſtance du centre de la Lune en ſyſigie au centre du même Aſtre. Or, la différence de ces quarrés eſt à très-peu-près égale au diamètre de l'orbe de la Lune qui paſſe par les ſyſigies; car la Terre étant plus de 300 fois plus éloignée du Soleil que de la Lune, le rayon de l'orbite lunaire, qui exprime la différence des diſtances de la Terre & de la Lune au Soleil, eſt fort petit par rapport à la grande diſtance de la Terre au Soleil, &

par conséquent les racines des quarrés dont nous venons de parler, n'ont qu'une très-petite différence.

Or, quand deux grandeurs approchent d'être égales, la différence qui est entre leurs quarrés est à peu-près double de celle qui est entre leurs racines; ainsi 1 & $1 + \frac{1}{\infty}$ ne différant que de $\frac{1}{\infty}$, leurs quarrés qui sont 1 & $1 + \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}$ différent de $\frac{2}{\infty}$. Dans le cas présent, les distances de la Terre & de la Lune sont comme 1 & $1 + \frac{1}{300}$; leurs quarrés sont comme 1 & $1 + \frac{2}{300} + \frac{1}{300 \times 300}$; & parce que le dernier terme n'est que la quatre-vingt-dix milliéme partie de l'unité, il est négligeable, & la différence des quarrés est $\frac{2}{300}$ double de celle qui se trouve entre les racines; d'où il suit que la différence des actions du Soleil sur la Terre & sur la Lune, en conjonction ou en opposition, & par conséquent la diminution de la pesanteur de la Lune sur la Terre dans les sysigies est proportionnelle au double du rayon ou au diamètre entier de l'orbe lunaire qui passe par les sysigies.

Or, traitant ici la Lune comme se mouvant dans un cercle pour ne pas multiplier les difficultés, le diamètre de l'orbite lunaire, qui exprime sa diminu-

tion de pesanteur, est double du demi-diamètre de cette orbite qui exprime (*n.* 89.) son augmentation.

Donc la *diminution de la pesanteur de la Lune dans les sysigies est à très-peu près double de son augmentation dans les quadratures ; & celle-ci étant $\frac{1}{178}$ de son poids, celle-là en est la $\frac{1}{89}$ partie.*

XCI. Si la Lune est entre la quadrature & la conjonction, elle sera attirée obliquement par le Soleil plus fortement que la Terre, à cause du plus grand éloignement de celle-ci, & plus fortement que dans la quadrature, à cause de sa moindre distance du Soleil. L'action de cet Astre se décomposera sur elle en deux forces, l'une parallèle & égale à la ligne, qui passant par les centres de la Terre & du Soleil, exprime l'action de celui-ci sur la Terre, & sera dès-lors représentée par une ligne qui passe au-dessous du centre du Soleil, & sera employée à retenir la Lune dans le même mouvement annuel que la Terre ; l'autre oblique à celle-ci, parallèle à celle qui joint l'extrémité de la premiere, & la ligne oblique qui passe par le centre du Soleil, oblique par conséquent au rayon tiré de la Lune à la Terre, & toute

entiere en dehors de l'orbite lunaire.

Cette ſeconde force ſe trouvant oblique au rayon de l'orbe de la Lune, ou, ce qui eſt le même, à la direction de la peſanteur naturelle de la Lune vers la Terre, ſe décompoſera en deux autres forces, l'une perpendiculaire au rayon de l'orbe de la Lune, l'autre dans le prolongement de ce rayon. La premiere affectera le mouvement en long de la Lune, le retardera de la conjonction à la quadrature, & l'avancera au contraire, quand la Lune viendra de la quadrature à la conjonction; l'autre tirant la Lune dans le prolongement du rayon de ſon orbite, diminuera la peſanteur de la Lune ſur la Terre, mais à tous momens moins que dans la conjonction.

Plus la Lune s'avancera vers la quadrature, plus la ligne de la premiére décompoſition, qui eſt toujours égale à la diſtance de la Terre au Soleil, s'élevera vers la ligne qui joint la quadrature & le centre de la Terre, & plus la ligne oblique, ſur le rayon de l'orbite de la Lune, ſe redreſſera ſur ce rayon. Il y aura donc un tems & un lieu avant la quadrature, où elle formera un angle droit avec ce rayon pour venir enſuite ſe confondre avec lui

à la quadrature. Dans ce point, la force qui tiroit la Lune dans le prolongement de son rayon, devient o, & depuis ce point jusqu'à la quadrature, sa direction tombera en dedans de l'orbe & dans la direction de son rayon, augmentant continuellement la pesanteur de la Lune jusqu'à la plus grande augmentation qui se fera à la quadrature.

Ce point où la pesanteur de la Lune sur la Terre ne sera ni augmentée ni diminuée, se trouve à 54° 44′ de la sysigie. En effet, les cas moyens devant participer de ces extrêmes, la diminution de la pesanteur de la Lune ne doit pas se faire au seul point de la sysigie, ni son augmentation au seul point de la quadrature; mais l'une & l'autre doit commencer & continuer à quelques distances de ces points. La diminution qui se fait à la sysigie, s'affoiblissant toujours par degrés, & passant par o, pour donner lieu ensuite à l'augmentation qui, croissant par degrés, aura son *maximum* pour diminuer après & devenir o à son tour.

La force perpendiculaire au rayon de l'orbite lunaire dans la seconde décomposition, est nulle dans la sysigie & dans la quadrature; elle croît donc depuis la

syſigie juſqu'à un certain point entr'elle & la quadrature, & décroît depuis ce point juſqu'à la quadrature. De-là on démontre qu'elle eſt la plus grande de toutes, & que la viteſſe de la Lune en eſt la plus altérée dans les octans, ou à 45° de la syſigie ou de la quadrature.

La force dirigée ſelon le rayon de l'orbite lunaire, eſt le double de ce rayon & diminue le plus la peſanteur de la Lune à la syſigie; elle eſt proportionnelle à ce rayon, & augmente la peſanteur de la Lune à la quadrature; elle eſt nulle, comme nous avons vû, dans un point intermédiaire : mais parce que la diminution dans la syſigie eſt double de l'augmentation dans la quadrature, il faut que cette force décroiſſe plus long-temps, quand la Lune vient de la syſigie pour s'anéantir tout-à-fait, que quand la Lune vient de la quadrature, & que le point où elle eſt nulle, ſoit au-delà de 45° de la syſigie. Si cette force ſuivoit la raiſon des arcs, elle ne ſeroit nulle qu'à 60° de la syſigie; mais comme dans toute décompoſition les forces ſuivent la raiſon des ſinus des angles, celle dont il s'agit ſera nulle à 35° 16′ de la quadrature, ou à 54° 14′ de la syſigie. *Voyez la Note à la fin.*

En général, *la force qui affecte, qui augmente ou diminue la pesanteur de la Lune sur la Terre, est comme la somme ou la différence du demi-rayon de l'orbe lunaire & des $\frac{3}{2}$ du co sinus du double de la distance de la Lune à la sysigie;* or, dans la sysigie cette force est 2 *D* &diminue la pesanteur; à la quadrature elle est *D*, & augmente la pesanteur. En effet, à la quadrature ou distance de 90° de la sysigie, le double de cette distance est 180°, ou 0°, dont le co-sinus est le rayon ou *D*; donc alors la force est $\frac{1}{2} D - \frac{3}{2} D = -\frac{2}{2} D = -D$; c'est-à-dire, qu'alors la force dont il s'agit, augmente la pesanteur & est comme *D*. A la sysigie ou à la distance 0°; le co-sinus est aussi le rayon ou *D*, & la force est $\frac{1}{2} D + \frac{3}{2} D = 2\ D$. Cette force sera donc nulle, quand les parties qui la composent se détruiront. Donc elle est nulle quand $\frac{1}{2}$ *D* égale les $\frac{3}{2}$ du co-sinus du double de la distance à la sysigie, ou ce qui est le même, quand le tiers du rayon égale ce co-sinus. Or, le tiers du rayon 1000000 est 333333, qui est le co-sinus de 109° 28′, sa moitié est 54° 44′; donc *la force qui n'augmente ni ne diminue la pesanteur de la Lune, est éloignée de 54° 44′ de la sysigie.* On peut

donc, en reprenant ce que nous venons d'expliquer, établir les propositions suivantes.

XCII. *L'action du Soleil sur la Lune, diminue sa pesanteur à l'égard de la Terre, lorsque la Lune est dans les sysigies ; elle l'augmente, la Lune étant dans les quadratures. La diminution dans les sysigies est double de l'augmentation dans les quadratures : l'une est la* $\frac{1}{89}$, *l'autre la* $\frac{1}{178}$ *partie de la pesanteur naturelle de la Lune, venant de l'attraction de la Terre ; & dans ces quatre points la vitesse de la révolution de la Lune n'est aucunement troublée.*

XCIII. *Il y a quatre points dans l'orbite de la Lune, où sa pesanteur sur la Terre n'est point altérée par l'action du Soleil. Ce sont ceux qui sont à la distance de* 54^d $44'$ *de part & d'autre des sysigies.*

Depuis les sysigies jusqu'à ces points sa pesanteur est continuellement diminuée par des degrés toujours moindres, elle est de plus en plus augmentée depuis ces points jusqu'à la quadrature, & cette augmentation subsiste, quoique dans des degrés de plus en plus foibles depuis ces quadratures jusqu'à ces points.

Cette augmentation ne s'étendant qu'à 35° $16'$ *de part & d'autre des quadratures,*

la pesanteur de la Lune se trouve diminuée & plus long-temps, & dans des plus grands degrés qu'elle n'est augmentée à chaque révolution.

XCIV. *Il n'en est pas de même de la vitesse de la Lune ; toutes les inégalités qu'elle éprouve depuis une sysigie jusqu'à la quadrature suivante, se rétablissent par degrés, lorsque la Lune va de cette quadrature à l'autre sysigie ; elles recommencent par ordre depuis cette sysigie jusqu'à la seconde quadrature, & se détruisent ensuite en allant de là à la premiere sysigie.*

XCV. *La Lune doit accélérer sa vitesse en allant des quadratures aux sysigies, & la retarder en avançant des sysigies vers les quadratures ; c'est-à-dire, que depuis le premier quart de son mois, ou depuis la nouvelle Lune jusqu'au premier quartier son mouvement se ralentira, qu'il s'accélérera de là jusqu'à son plein, pour être retardé de nouveau jusqu'au dernier quartier, & de nouveau accéléré jusqu'à la conjonction ; de maniere que toutes choses d'ailleurs égales, sa plus grande vitesse soit aux environs des sysigies, & sa plus petite aux environs des quadratures. ;* ce que les Astronomes ont observé, & ce qu'ils désignent sous le nom de la *variation* de la Lune, selon laquelle

laquelle cet Aſtre gagne 35′ au-delà de ſon mouvement moyen depuis l'octant, qui précéde la ſyſigie, juſqu'à l'octant ſuivant, & les perd depuis l'octant juſqu'à la quadrature.

Cela ſuit de ce que nous avons démontré; car la Lune venant de la quadrature à la conjonction, eſt attirée obliquement par le Soleil dans la direction de ſon mouvement, & en eſt accélérée; remontant de la conjonction au premier quartier, elle en eſt de même attirée obliquement, mais dans un ſens contraire à ſon mouvement, & elle eſt retardée. L'accélération produite en venant vers la ſyſigie ne ſe détruit que peu-à-peu & vers les octans ſuivants, le retardement perſévere juſqu'à la quadrature; & par le calcul des forces, Newton trouve que l'aire décrite dans un temps donné dans les quadratures, eſt à l'aire décrite dans le même temps dans les conjonctions, comme 10973 à 11073.

Dans la partie ſupérieure de l'orbite de la Lune, nous avons vu (*n.* 88.) qu'en conſidérant la Terre comme immobile, l'action du Soleil a ſur la Lune l'effet d'une force répulſive qui, ſecondant le mouvement d'éloignement de la Lune

du premier quartier à l'opposition, nous la fait paroître comme accélérée, & qui, agissant en sens contraire à la direction du mouvement de la Lune, quand elle vient de l'opposition au dernier quartier, nous la fait paroître retardée; & ainsi de suite, & successivement dans les différens quartiers de son mois.

Quand la Lune sort du premier quartier, la Terre, plus attirée qu'elle, descend & s'en éloigne; le rayon visuel tiré de la Terre à la Lune, partant d'un point pris plus bas que le premier, le coupe au centre de la Lune, & se termine à un point plus oriental; ce qui paroit accélérer la Lune selon la suite des signes. Quand la Lune est entre l'opposition & le dernier quartier, la Terre plus attirée continue de descendre plus que la Lune, chaque rayon visuel suivant se termine dans le Ciel à un point plus occidental, & la Lune en paroit d'autant retardée dans son mouvement; les mêmes phénomènes doivent donc avoir lieu dans ces deux parties de l'orbite de la Lune.

J'ai dit, *toutes choses d'ailleurs égales*, parce que la Lune ne décrivant point un cercle, mais une ellipse, c'est le périgée qui est le lieu de la plus grande vitesse

absolue ; d'où il suit que si le périgée se trouve dans une des sysigies, la Lune aura alors dans ce point la plus grande vitesse possible, & si le périgée est dans une autre situation, comme nous verrons dans la suite que cela doit arriver, la vitesse de la Lune sera plus grande dans les sysigies, moindre dans les quadratures, qu'elle ne seroit par la condition seule de son ellipse & sans cette action *perturbative*. La même chose doit arriver dans les Satellites de *Saturne* & de *Jupiter* ; mais à cause de leur grand éloignement de nous, & de la briéveté de leur mois, de si petites *anomalies* ne peuvent s'appercevoir à nos distances

XCVI. *Dans les sysigies & dans les quadratures, la Lune décrit des aires proportionnelles au temps ; ce qui n'arrive point exactement dans tout autre point de son orbite.* C'est que dans les sysigies & les quadratures (*n.* 89.) la vitesse de la Lune n'est point altérée par l'action du Soleil ; car nous avons vu (*n.* 8.) que de quelque maniere que la force centripète soit augmentée ou diminuée, la vitesse restant constante, la proportionnalité des aires aux temps n'est point détruite.

Mais dans les autres points de l'orbite,

la viteſſe de la Lune eſt augmentée ou diminuée par la force perturbatrice du Soleil (*n.* 91.) ; donc, (*n.* 8.) la porportion des aires aux temps eſt détruite dans ces parties.

XCVII. *L'orbite de la Lune eſt plus courbe & plus allongée dans les quadratures, plus plate & plus rétrécie dans les ſyſigies, toutes choſes ſuppoſées égales;* car la courbure de l'orbe ou l'inflexion du mouvement eſt d'autant plus grande, que la peſanteur eſt plus grande & a plus de temps pour agir; car alors elle oblige le mobile à ſe détourner davantage de la ligne droite : or dans les quadratures (*nos.* 89 & 90.) la force centripète de la Lune eſt plus grande que dans les ſyſigies, où, loin d'être augmentée, elle eſt diminuée, & elle y donne ſur chaque point un plus grand nombre de coups ; car agiſſant continuellement, le nombre de ſes coups ou de ſes impreſſions eſt proportionné au tems que le mobile ſéjourne ſur chaque point, lequel eſt plus grand vers les quadratures où la viteſſe eſt moindre ; moins grand vers les ſyſigies où la viteſſe eſt plus grande ; & le calcul démontre que dans une telle orbite & dans les quadratures, la diſtance de la Lune à la Terre, doit

être à ſa diſtance dans les ſyſigies, comme 70 à 69.

Le peſanteur étant ce qui rapproche la Lune de la Terre, il ſemble que là où la peſanteur eſt plus grande, comme dans les quadratures, ce Satellite en doit être plus rapproché ; mais il faut du temps à la peſanteur pour avoir ſon effet complet, & c'eſt parce que cette force cherche à rapprocher la Lune de la Terre, qu'il arrive que s'en approchant continuellement plus en partant de la quadrature, elle s'en trouve plus rapprochée dans la ſyſigie. Si la Lune ſe fût mûe d'abord dans un cercle, parvenue à la quadrature, ſa peſanteur ſur la Terre, augmentée par l'action du Soleil, l'eût fait deſcendre au-dedans de ce cercle par un arc plus courbe & plus rapproché de la Terre ; elle eût continué dans la ſuite de s'en rapprocher davantage, tant en vertu de cette premiere inflexion, que par l'augmentation continuelle de ſa peſanteur, qui dure juſqu'à 35° 16′, endeçà de la quadrature. Depuis ce point ſa peſanteur eût diminué juſqu'à la conjonction ; mais l'inflexion étant faite vers la quadrature, il eût reſté à la Lune aſſez de peſanteur (*n.* 24.) pour ſoutenir ou

entretenir l'applatiſſement de l'orbe qui en provient ; & au lieu d'un orbe circulaire, la Lune eût décrit une *ovale* dont le grand axe auroit paſſé par les *quadratures*, le petit par les *ſyſigies*.

XCVIII. La courbe originaire de la Lune, avant que d'être modifiée par l'action du Soleil, n'étant pas un cercle mais une ellipſe ayant la Terre à ſon foyer, les inégalités que nous venons de décrire ſe réduiſent à rendre la courbure de ſon orbite, & par conſéquent ſa diſtance à la Terre plus grandes dans les quadratures, plus petites dans les ſyſigies, qu'elles ne l'euſſent été ſans cette action; de maniere que la ligne des apſides ſe trouvant aux quadratures, ſa diſtance apogée ſera la plus grande poſſible, & ſa diſtance périgée la plus grande de toutes ces diſtances ; au lieu que la ligne des apſides concourant avec les ſyſigies, la diſtance périgée ſera la plus petite poſſible, & la diſtance apogée ſera la moindre de toutes les diſtances apogées, quoiqu'elle puiſſe être encore plus grande que la diſtance de la Lune aux quadratures.

XCIX. En vertu des mêmes principes, *l'orbite de la Lune s'étendra de plus*

en plus à mesure que la Terre approchera du Soleil, & ce Satellite sera plus éloigné de nous en hyver qu'en été. En effet, quoique nous ayons prouvé qu'en vertu de l'inflexion qui se fait dans l'orbite de la Lune vers les quadratures, cette orbite devoit s'applatir vers les sysigies : cependant parce que la diminution de sa pesanteur aux sysigies est double de son augmentation aux quadratures (*n.* 90.), l'applatissement aux quadratures est moindre, & la Lune moins rapprochée de la Terre, que si la diminution étoit précisément égale à l'augmentation. Il y a donc à chaque révolution une dilatation de l'orbite, dûe à la quantité dont la diminution de la pesanteur surpasse l'augmentation.

Or, cet excès de diminution de la pesanteur dans les sysigies sur son augmentation dans les quadratures, est plus grand quand la Terre est plus près du Soleil que quand elle en est plus éloignée : car plus la Terre approche du Soleil, plus la distance de la Lune à la Terre est comparable dans la conjonction à la distance de la Terre au Soleil ; donc plus la diminution absolue de la pesanteur de la Lune sur la Terre, est grande ou comparable

par rapport à sa pesanteur absolue ; & si de cette diminution totale on retranche la moitié pour faire déduction de la quantité dont la pesanteur augmente dans les quadratures, on verra que le reste qui exprime la diminution effective de la pesanteur de la Lune dans une révolution, est plus grand lorsque la Terre est périhélie, que quand elle est aphélie, & que son orbite doit être moins resserrée dans le premier cas, que dans le second.

De-là vient que, toutes choses d'ailleurs égales, la Lune est plus éloignée de nous en hiver qu'en été, parce que la Terre avançant continuellement en hiver vers son périhélie, il se fait une dilatation consécutive de l'orbite de la Lune, proportionnée à l'augmentation de la diminution de sa pesanteur, au lieu qu'en été la Terre étant vers son aphélie, la pesanteur de la Lune est moins diminuée en vertu de la plus grande distance du Soleil, & son orbe est plus comprimé par le résidu de sa pesanteur vers les syzigies.

C. Les temps des révolutions périodiques (*nos.* 33 & 83.) sont comme les racines quarrées des cubes des grands axes des orbites, & par conséquent plus longs quand les orbites sont plus grandes ; ce

qui arrive en hiver quand la Terre est périhélie ; plus courts quand les orbes sont plus petits, ou en été quand la Terre est aphélie ; *donc le temps de la révolution de la Lune doit être plus long en hiver qu'en été ;* & comme la contraction ou la dilatation de l'orbite doivent augmenter par degrés à mesure que la Lune s'éloigne ou s'approche du Soleil, *il doit en résulter des inégalités entre les temps de plusieurs révolutions consécutives de la Lune*, comme les Astronomes l'ont observé.

CI. *L'apogée de la Lune doit avancer selon l'ordre des signes, lorsque la Lune est dans les syzigies ; rétrograder quand la Lune est vers les quadratures ; mais parce que la progression surpasse la rétrogradation, l'apogée s'avance toujours selon l'ordre des signes, & parcourt environ trois degrés dans une révolutian.*

Ce phénomène seroit impossible, si le mouvement de la Lune autour de la Terre n'étoit pas troublé par l'action du Soleil. La Lune ayant alors une pesanteur variable dans la raison renversée des quarrés de ses distances au centre de la Terre, elle se trouveroit toujours à une égale distance de cette Planète dans les points de son orbite qui répondroient aux mê-

mes points du Ciel, & sa courbe seroit une ellipse immobile.

Mais parce que l'action du Soleil modifie la force centrale de la Lune, qu'elle la diminue dans les sysigies, & l'augmente dans les quadratures, la ligne des apsides de la Lune n'est pas immobile, mais doit tantôt avancer directement, tantôt rétrograder : car la Lune, allant de l'opposition & de son apside supérieure, à la quadrature, & sa pesanteur étant diminuée jusqu'à 35° 16′ de distance de la quadrature, elle doit continuellement allonger ses rayons vecteurs, & s'élever au-dessus de sa courbe, à moins qu'on ne suppose que l'apside de cet orbe s'avance & se meut dans le même sens que la Lune pour lui présenter des distances convenables à sa pesanteur actuelle, auquel cas l'apogée s'avancera selon l'ordre des signes, ou, ce qui est le même, le mouvement de la Lune moins infléchi, arrivant plus tard à l'angle droit avec son rayon vecteur, transportera son apogée dans un point plus avancé selon l'ordre des signes.

Dès que la Lune approchera de la quadrature, sa pesanteur sur la Terre augmentera ; la Lune descendroit donc au-

deſſous de ſon orbe pour décrire au-dedans de lui une nouvelle trajectoire, ſi le lieu du périgée ne s'avançoit vers la Lune pour lui offrir continuellement des points moins diſtants du foyer & convenables à ſa peſanteur actuelle, & le périgée s'avancera ainſi contre l'ordre des ſignes, ou rétrogradera, ou, ce qui eſt le même, le mouvement de la Lune plus infléchi par cette addition de peſanteur, ſe courbera davantage ſur ſon rayon vecteur, & arrivera plutôt à l'angle droit avec lui.

A 54° 44′ de la conjonction, la peſanteur de la Lune rediminuera, ſes rayons vecteurs s'alongeront, ſon mouvement ſe courbera moins, arrivera plus tard à l'angle droit avec ſon rayon vecteur, & placera par-là le périgée dans un point plus oriental qu'il n'eût été ſans cette diminution; de maniere qu'on ne puiſſe rapporter le mouvement de la Lune à un mouvement dans une même ellipſe, à moins de ſuppoſer cette ellipſe mobile & de faire avancer ſon grand axe dans la ſuite des ſignes, lorſque la Lune eſt vers les ſyſigies, & contre l'ordre des ſignes, quand elle eſt près des quadratures.

Mais parce que la diminution de la pe-

ſanteur de la Lune, dans les ſyſigies, eſt double de l'augmentation dans les quadratures (*n.* 90.), & qu'elle s'étend à 54° 44′ de part & d'autre des ſyſigies (*n.* 91), tandis que l'augmentation ne s'étend qu'à 35° 16′ de part & d'autre des quadratures, la cauſe qui fait avancer l'apogée, eſt plus grande que celle qui le fait rétrograder, & il n'y a de ſenſible, après une révolution, que l'excès dont ſon mouvement direct a ſurpaſſé le rétrograde.

CII. L'apogée avançant de trois degrés dans une révolution, la ligne des apſides de la Lune acquerra à chaque fois une nouvelle poſition, & il en réſultera de nouvelles inégalités obſervées dans le mouvement de cet apogée.

Quand la ligne des apſides ſe confondra avec la ligne ſynodique ou des ſyſigies, comme nous l'avons ſuppoſé article précédent, *l'excès de la progreſſion de l'apogée ſur la rétrogradation, ſera le plus grand qu'il eſt poſſible, & cette progreſſion ſe fera avec la plus grande viteſſe*; car l'excès de la progreſſion de l'apogée devant être proportionné à l'excès de la diminution de la peſanteur ſur ſon augmentation, & cette diminution étant proportionnelle

(*n.* 90.) au diamètre de l'orbite lunaire, qui joint les ſynodes ou ſyſigies, il s'enſuit que cette diminution eſt plus grande, & par conſéquent l'effet qu'elle produit, lorſque la ligne des ſyſigies eſt plus grande; ce qui arrive quand la ligne des apſides, ou le grand axe, concourt avec cette ligne.

Mais *ſi la ligne des apſides concourt avec celle des quadratures, la régreſſion de l'apogée ſera la plus grande, & ſa progreſſion la plus petite qu'il ſoit poſſible dans une révolution*; car alors la ligne des apſides, ou le grand axe, exprimant l'augmentation de la peſanteur dans les quadratures, (*n.* 89.) & le double ſeulement du petit axe, ſa diminution dans les ſyſigies, la cauſe de la rétrogradation eſt la plus grande poſſible, celle de la progreſſion la plus petite de toutes.

Il pourra même arriver que *dans une révolution la régreſſion de l'apogée, placée en quadrature, ſurpaſſe ſa progreſſion*; parce que la ligne des apſides en quadrature, qui exprime la ſomme des augmentations de la peſanteur, pourra être plus grande que le double de l'ordonnée qui paſſe par le foyer & les ſyſigies, & qui exprime la ſomme des diminutions; mais

cela n'empêchera pas la révolution entiere de l'apogée, ſelon l'ordre des ſignes, en près de 9 ans, ou 8 ans 309j. 8 h. 20′, parce que la Terre avançant dans ſon orbite, la ligne des apſides de la Lune ceſſe bientôt d'être en quadrature avec le Soleil, & l'apogée recommence à avancer plus qu'à rétrograder.

Cette progreſſion de l'apogée concourt elle-même à ſon augmentation; car l'apogée avançant ſelon l'ordre des ſignes, auſſi bien que le Soleil dans ſon mouvement annuel apparent, la ligne des apſides demeure plus long-temps en ſyſigie avec le Soleil, & donne par-là, à la cauſe qui produit ſon avancement ſelon l'ordre des ſignes, plus de temps pour agir; l'apogée reculant, au-contraire, le plus qu'il eſt poſſible, quand il eſt en quadrature, cette rétrogradation même eſt cauſe que la ligne des apſides demeure moins long-temps en quadrature, & contribue elle-même à ſa diminution.

Dans le ſecond & quatriéme quartier de la Lune, la viteſſe eſt accélérée depuis 54° 16′ juſqu'à la ſyſigie; & là où la progreſſion de l'apogée a lieu; c'eſt donc une ſeconde cauſe qui empêche le mouvement de la Lune de s'inflêchir autant

qu'il devroit, & qui contribue à transporter plus loin l'apogée dans la ſuite des ſignes. Il eſt vrai qu'alors la viteſſe eſt augmentée pendant 35° 16′ de la quadrature, temps auquel l'apogée recule; mais outre que ce temps eſt moins long, cette augmentation même de viteſſe force alors l'apogée de rétrograder moins, puiſqu'elle s'oppoſe d'autant à l'inflexion du mouvement par l'augmentation de la peſanteur. Il eſt vrai encore que dans le premier & troiſiéme quartier la viteſſe eſt retardée; mais la Lune ne perdant alors que ce qu'elle avoit gagné ſur ſa viteſſe naturelle, la progreſſion de l'apogée devient plus lente que dans les autres quartiers, mais ſubſiſte toujours fort longtemps dans des degrés qui l'emportent ſur ceux qu'eût produits ſa viteſſe naturelle. C'eſt pour n'avoir pas fait attention à cette force tangentielle, que quelques Géometres avoient cru que le calcul des forces ne donnoit que la moitié du mouvement de l'apogée; mais ils ont ſçu euxmêmes rectifier leur calcul, & déduire de la peſanteur le mouvement de l'apogée, tel qu'il eſt connu par l'obſervation.

CIII. *La même cauſe qui produit le mouvement de l'apogée, fait varier l'excen-*

tricité de l'orbite de la Lune ; elle l'augmente dans les ſyſigies, la diminue dans les quadratures, & la diminution eſt moindre que l'augmentation.

Si le Soleil n'agiſſoit pas ſur la Lune, ſa peſanteur ſur la Terre ſeroit variable dans le rapport renverſé des quarrés de ſes diſtances à la Terre, & l'excentricité de ſon orbite ſeroit toujours la même; mais par l'action du Soleil la peſanteur de la Lune diminue dans les ſyſigies, & elle y diminue d'autant plus (*n.* 90.) que ſa diſtance actuelle de la Terre eſt plus grande, d'autant moins que cette diſtance eſt plus petite; & par conſéquent dans les ſyſigies, elle diminue plus qu'elle n'auroit fait, là où elle eſt plus petite, moins là où elle eſt plus grande; donc dans le paſſage de la Lune de ſon apſide ſupérieure à l'inférieure par la ſyſigie, ſa peſanteur actuelle, aux environs de cette apſide inférieure, eſt plus grande par rapport à ſa peſanteur aux environs de l'apſide ſupérieure, que dans la raiſon renverſée des quarrés des diſtances; ſon mouvement eſt donc plus infléchi vers le centre, & la Lune doit s'en approcher davantage, que ſi la Terre agiſſoit ſeule ſur ce Satellite; ce qui augmente l'excentricité.

En

En vertu de cette ſeule infléxion du mouvement vers le périgée, ſi le trouble du Soleil ceſſoit, la Lune remonteroit plus haut à ſon apogée, qu'elle n'eût fait ſans cette infléxion, & à cet égard l'augmentation d'excentricité, produite dans le périgée, ſubſiſteroit; mais par l'action du Soleil, la Lune remontant vers ſon apogée, & paſſant par la ſyſigie, diminue encore de peſanteur; ſon mouvement d'aſcenſion en devient donc encore moins réprimé; & remontant plus haut, elle augmente encore par cette raiſon ſon excentricité.

Mais quand la Lune, en montant de ſon apſide inférieure, paſſe par la quadrature, ſa peſanteur eſt augmentée, & l'eſt d'autant plus que ſa diſtance à la Terre eſt plus grande à cette quadrature (*n.* 89.); c'eſt-à-dire, qu'elle augmente là où naturellement elle eſt plus petite; par conſéquent elle y diminue moins qu'elle ne devroit, & y infléchiſſant davantage le mouvement de la Lune, elle l'empêche de remonter ſi haut, rend ſon mouvement plus circulaire, & diminue ſon excentricité.

Cette infléxion une fois produite, ou le mouvement rendu plus circulaire, ſi

l'action du Soleil ceſſoit, la Lune approcheroit moins de la Terre, en revenant à ſon apſide inférieure, & la diminution de l'excentricité de ſon orbite ſubſiſteroit; mais alors elle paſſera par l'autre quadrature, où ſa peſanteur eſt augmentée par le Soleil, en raiſon de ſa diſtance à la Terre, ce qui augmentera l'infléxion du mouvement, & ſembleroit devoir augmenter l'excentricité.

Cependant ſi l'on nomme D la diſtance de la Lune à la Terre à cette ſeconde quadrature, d ſa diſtance à la premiere quadrature plus voiſine du périgée, on verra que la peſanteur totale de la Lune à cette ſeconde quadrature eſt à ſa peſanteur totale à la premiere :: $dd + D$. $DD + d$, & dans un rapport moindre que celui de dd à DD. Or ſi à ces deux quadratures le rapport des peſanteurs étoit celui de dd à DD, l'inflexion qui ſe feroit à la ſeconde, ſeroit préciſément celle qu'il faudroit pour entretenir l'excentricité produite à la premiere; mais ce rapport étant moindre, la peſanteur depuis cette ſeconde quadrature juſqu'au périgée, varie moins qu'elle n'auroit fait ſans cette augmentation; ce qui rend le mouvement plus circulaire, & diminue l'excentricité.

Mais parce que la force, qui l'augmente dans les ſyſigies, eſt plus grande que celle qui la diminue dans les quadratures, *l'effet de la force du Soleil ſera*, toute compenſation faite, *d'augmenter l'excentricité à chaque révolution*.

CIV. Par la même raiſon, *l'augmentation de l'excentricité ne ſera pas conſtante ou égale dans toutes les révolutions*. La force qui la produit étant la plus grande de toutes quand la ligne des ſyſigies concourt avec celle des apſides, & la plus petite qu'il ſoit poſſible, quand la ligne des apſides concourt avec celle des quadratures (*n.* 102.) l'excentricité ſera la plus grande qu'il ſoit poſſible dans le premier cas, & la plus petite de toutes dans le ſecond; de maniere que la différence entre ces cas extrêmes puiſſe ſurpaſſer la moitié de la plus petite excentricité. Elle croîtra & diminuera par degrés entre ces deux limites, ſelon que par le mouvement de la Terre autour du Soleil, & par le mouvement propre de la ligne des apſides, cette ligne ſera placée vers les ſyſigies ou vers les quadratures.

D'où il ſuit que *la Lune eſt plus près de nous, & a plus de viteſſe dans ſon périgée, eſt plus lente & plus éloignée dans ſon*

apogée, lorsque ces points tombent sur les sysigies, que dans toute autre situation; & qu'il y a certaines limites que la Lune ne passe point en s'éloignant ou en s'approchant de la Terre, entre lesquelles ses plus grandes & ses plus petites distances varient continuellement à notre égard dans ses révolutions consécutives.

CHAPITRE VII.

Suite du Mouvement de la Lune.

CV. NOUS avons vu (*n.* 91.) que lorsque la Lune est entre la sysigie & la quadrature, elle est obliquement & plus fortement attirée que la Terre par le Soleil; que l'action oblique de cet Astre équivaut à deux forces, l'une parallèle & égale à la force qui tire la Terre, laquelle ne trouble point le mouvement de la Lune, l'autre oblique au rayon de l'orbite lunaire, & faisant avec lui un angle tantôt obtus, tantôt droit, tantôt aigu; que cet angle est obtus depuis la sysigie jusqu'à 54° 44′, qu'il est droit à 54° 44′, & aigu depuis ce point jusqu'à la

quadrature ; que quand cette ſeconde force fait un angle obtus avec le rayon de l'orbite lunaire, elle équivaut à deux autres forces, l'une perpendiculaire ſur ce rayon qui affecte le mouvement en long de la Lune, & qui eſt la plus grande poſſible à 45° de la ſyſigie, l'autre dirigée ſelon le prolongement de ce rayon, qui continue à diminuer la peſanteur de la Lune ; que la décompoſition de cette ſeconde force n'a point lieu à 54° 44′ de la ſyſigie où elle eſt perpendiculaire au rayon de l'orbite lunaire, & que la peſanteur de la Lune n'eſt-là ni augmentée ni diminuée ; qu'enfin, quand la ſeconde force de la premiere décompoſition fait un angle aigu avec le rayon de l'orbite Lunaire, elle équivaut de même à deux forces, l'une pouſſant la Lune vers la Terre, dans la direction de ce rayon juſqu'à ce qu'elle ſe confonde pleinement avec lui, & lui ſoit proportionnelle à la quadrature, l'autre perpendiculaire à ce rayon, continuant d'affecter la viteſſe tangentielle de la Lune ; & c'eſt de ces deux forces que nous avons déduit les variations expliquées dans le Chapitre précédent.

Mais nous avons ſuppoſé alors le plan

de l'orbite de la Lune, couché ſur le plan de l'écliptique ou de l'orbe de la Terre; ce qui s'éloigne peu de la vérité à cauſe du grand éloignement du Soleil; mais ce qui n'eſt pas rigoureuſement vrai, à cauſe de l'inclinaiſon réelle de l'orbe de la Lune ſur le plan de l'écliptique, que cet orbe traverſe & coupe ſous un angle de plus de 5° dans une ligne appellée la *ligne des nœuds*. Il faut donc avoir égard à cette inclinaiſon, examiner quels nouveaux effets elle doit produire, & comment l'action du Soleil ſe modifie & ſe combine par ſon moyen.

CVI. D'abord il eſt évident que s'il n'y avoit point de mouvement particulier dans la ligne des nœuds ou d'interſection, cette ligne demeureroit parallèle à elle-même, & par le mouvement annuel de la Lune & de la Terre, acquerroit toutes les ſituations poſſibles par rapport au Soleil. Chaque année elle concourroit deux fois avec la ligne des ſyſigies, deux fois avec celle des quadratures, après avoir paſſé par toutes les ſituations moyennes.

Or ces différents aſpects de cette ligne des nœuds, par rapport au Soleil, donnent lieu à différentes inégalités dans le mouvement de la Lune, en faiſant varier

l'inclinaiſon de ſon orbite, & faiſant rétrograder ſes nœuds d'environ 19 ° $\frac{1}{3}$ par an; ce qui eſt une nouvelle cauſe pour faire obtenir à cette ligne les différentes ſituations dont je viens de parler.

Suppoſons, en premier lieu, que la ligne des nœuds ſe confond avec celle des ſyſigies; dans ce cas elle paſſeroit par le Soleil, ſi elle étoit prolongée, & cet Aſtre ſe trouveroit dans le plan de l'orbe lunaire auſſi prolongé; toutes les actions du Soleil ſur la Lune, ſeroient de même dans le plan de l'orbite lunaire, & cet Aſtre n'en pourroit troubler la poſition tirant à lui, dans la même direction, tous les points de ce plan, il n'y produiroit ni vacillation, ni changement d'inclinaiſon, ni mouvement de rotation dans la ligne des nœuds.

Il n'en ſera pas de même dans toute autre poſition de la ligne des nœuds. Suppoſons à préſent que cette ligne ſe confonde avec celle des quadratures; que le plan de ce papier repréſente le plan de l'écliptique dans lequel eſt le Soleil, & que la moitié inférieure de l'orbe lunaire ſoit élévée de 5 degrés ſur ce papier, la moitié ſupérieure abaiſſée de la même quantité au-deſſous; il eſt évident que ſi

la Lune se trouve entre les quadratures, en quel point que ce soit, de la partie de son orbite la plus près du Soleil, cet Astre fera effort pour la rapprocher du plan où il est, & au-dessus duquel elle est élévée; que si la Lune est en conjonction, le Soleil n'attirera plus la Terre & la Lune par une même ligne, mais par deux lignes différentes qui feront un angle, dont le sinus sera, par rapport à l'angle que fait l'orbite de la Lune avec l'écliptique, le sinus d'un angle de 5 degrés; que cette force du Soleil sur la Lune en conjonction, se décomposera nécessairement en deux, l'une parallèle à celle qui attire la Terre, qui diminuera la pesanteur de la Lune, l'autre perpendiculaire au plan de la Lune, exprimée par le sinus de l'inclinaison de son orbe avec l'écliptique, & dont l'effet sera de pousser la Lune vers le plan de l'écliptique, & de l'en rapprocher; que si la Lune est en quadrature, la force du Soleil se décomposera de même en deux, l'une parallèle à celle qui attire la Terre, l'autre dirigée selon la ligne des nœuds, ou selon le rayon de l'orbite de la Lune, & qui ne produira aucun mouvement dans son inclinaison.

Mais si les nœuds demeurant en quadrature, la Lune est entr'elle & la conjonction, le Soleil attirera la Lune plus fortement que la Terre par une ligne oblique au plan de l'écliptique, & cette force se décomposera en deux; l'une parallèle au plan de l'écliptique & à la ligne, selon laquelle la Terre est attirée, ce qui ne pourra produire aucune inégalité; l'autre oblique au plan de l'écliptique, & qui sera forcée de se décomposer elle-même en deux, l'une perpendiculaire au plan de la Lune, qui la poussera vers l'écliptique, l'autre comprise entiérement dans le plan de l'orbe lunaire, & plus ou moins oblique au rayon tiré de la Lune au centre de la Terre, suivant la différente position de la Lune, comme il a été expliqué *n.* 91.

L'effet de cette derniere force sera de produire les inégalités expliquées jusqu'à présent, de se décomposer en deux, l'une perpendiculaire au rayon de l'orbite lunaire, l'autre dans la direction de ce rayon, en-dehors ou en-dedans de l'orbe, au moyen de laquelle tous les effets expliqués subsisteront, comme si le plan de l'orbe lunaire étoit confondu avec celui de l'écliptique.

Mais la force perpendiculaire au plan de la Lune aura son effet particulier, qui sera de chasser continuellement la Lune au-dessous de son orbite actuelle ; & cette force étant comme le sinus de l'angle que fait l'orbe lunaire avec le plan de l'écliptique, elle sera d'autant plus grande qu'elle sera plus éloignée du nœud, que le nœud sera plus éloigné de la sysigie, où alors cette force est nulle ; que la Lune sera plus éloignée de la quadrature, & que le sinus de l'inclinaison originaire de la Lune sera plus grand.

CVII. Si la ligne des nœuds se trouve entre les quadratures & les sysigies, cette force perpendiculaire au plan de la Lune subsistera ; elle sera nulle dans les points des nœuds, parce que ces nœuds sont dans le plan de l'écliptique ; elle sera nulle quand la Lune passera par la quadrature, parce que la force du Soleil se décomposant en deux, l'une parallèle à l'écliptique, l'autre oblique à l'écliptique & dirigée vers son plan, cette derniére à la quadrature est entiérement dirigée, selon le rayon de l'orbe lunaire, & ne souffre point de décomposition. En s'éloignant de la quadrature, cette force perpendiculaire au plan de la Lune renaîtra,

& sera d'autant plus grande, que la Lune s'éloignera davantage de la quadrature, que cet Astre s'éloignera davantage de son nœud, & que ce nœud sera plus éloigné de la sysigie, d'où l'on tire cette regle générale : que *l'augmentation de la force centrale dans les quadratures, est à la force qui agit sur le plan de la Lune, comme le cube du rayon est au sinus de l'inclinaison de l'orbite de la Lune, multiplié par le triple sinus de la distance de la Lune à la quadrature, & par le sinus de la distance du nœud à la sysigie.* Voyez l'éclaircissement à la fin.

CVIII. Il suit de-là que *l'inclinaison de l'orbe lunaire au plan de l'écliptique change quatre fois à chaque révolution*, quelle que soit la position de la ligne des nœuds, lorsqu'elle ne concourt pas avec les sysigies ; *que l'angle d'inclinaison augmente quand la Lune s'approche de son nœud, que cet angle diminue quand elle s'en éloigne ; & que dans l'un & l'autre cas son nœud est rétrograde.* En partant de son nœud, la Lune est soumise à la force qui agit perpendiculairement sur le plan de son orbite ; elle est donc chassée & continuellement forcée de descendre au-dessous de ce plan, & par la combinaison de ce

nouveau mouvement & de ſon mouvement circulaire, de décrire une nouvelle orbite qui ſe trace à tous momens au-deſſous du plan de l'orbite précédente; ce qui diminue l'angle d'inclinaiſon, & le nouvel orbe paroit alors venir d'un nœud plus éloigné; ce qui rend le nœud rétrograde.

Quand la Lune eſt parvenue à 90° de ſon premier nœud, ou à ſa plus grande diſtance de l'écliptique, & qu'elle s'avance vers ſon ſecond nœud, elle eſt de même à tous momens chaſſée vers l'écliptique, & forcée de la traverſer plutôt, (ce qui avance ſon nœud vers elle ou le rend rétrograde) & de couper l'écliptique ſous un plus grand angle d'inclinaiſon.

CIX. *Quand la ligne des nœuds joindra les quadratures, les nœuds continueront d'être rétrogrades; mais l'inclinaiſon de l'orbite, quand la Lune s'avancera vers ſon nœud, croîtra à peu-près autant, & par les mêmes degrés qu'elle avoit diminué lorſque la Lune s'éloignoit de ſon nœud*; car allant de la quadrature & du nœud à la ſyſigie, l'angle d'inclinaiſon diminuera continuellement, & transportera le nœud contre l'ordre des ſignes, comme il vient d'être

expliqué ; mais depuis la ſyſigie juſqu'à l'autre quadrature ou ſecond nœud, la force perpendiculaire qui augmente alors l'angle d'inclinaiſon, & fait avancer le nœud vers la Lune, ſera la même de ce côté que de l'autre à égale diſtance de la ſyſigie, & l'augmentation de l'inclinaiſon ſe préparant par les mêmes degrés qui avoient produit la diminution, tout ſera rétabli à cet égard quand la Lune ſera arrivée à ſon ſecond nœud, ou à très-peu-près, l'anticipation du nœud ne pouvant produire qu'une très-petite différence.

CX. *Mais les nœuds continuant à rétrograder, l'inclinaiſon ne ſe rétablira pas de même, quand la ligne des nœuds ſera entre les ſyſigies & les quadratures. L'angle d'inclinaiſon ſera plus diminué qu'augmenté quand la ligne des nœuds ſera avant les ſyſigies ; il ſera plus augmenté que diminué, quand la ligne des nœuds ſe trouvera après les ſyſigies.* *

* *M. Bouguer* a démontré dans ſes entretiens ſur l'inclinaiſon des orbites, que dans le tourbillon ce ſeroit préciſément le contraire de tous ces effets qui arriveroit; que les nœuds ſeroient toujours progreſſifs, & que la diminution & l'augmentation ſucceſſives des angles d'inclinaiſon ſe feroient préciſément au rebours de ce qui a lieu.

Car si la ligne des nœuds est dans les octans, par exemple, avant les sysigies, la Lune allant de son nœud à 90°, diminuera pendant tout ce temps l'angle de l'inclinaison de son orbite, & passera par la sysigie où la force est très-grande ; & de-là jusqu'à son nœud, où l'angle d'inclinaison augmente, elle passera par la quadrature, où la force perpendiculaire est nulle ; & par conséquent l'angle d'inclinaison sera plus diminué qu'augmenté.

Si la ligne des nœuds est après les sysigies, la Lune partant de son nœud passera par la quadrature, où la force perpendiculaire est nulle, & par la sysigie depuis 90° de là jusqu'à son nœud. Dans la premiere partie l'angle d'inclinaison diminue, il augmente dans la seconde ; il est donc plus augmenté que diminué.

CXI. Il suit de-là que quand la ligne des nœuds se porte des sysigies aux quadratures, par le mouvement annuel de la Terre, comme elle se trouve alors avant les sysigies, l'angle d'inclinaison diminue à chaque révolution plus qu'il n'augmente, & *il est le plus petit de tous quand les nœuds sont dans les quadratures.*

Quand, au-contraire, la ligne des

nœuds passe des quadratures aux sysigies, elle se trouve dans toutes les positions intermédiaires après les sysigies, & l'angle de l'inclinaison de l'orbe de la Lune augmente plus qu'il ne diminue à chaque révolution. Il est donc *le plus grand possible, quand la ligne des nœuds est parvenue aux sysigies*. Ces deux cas extrêmes sont des limites que la Lune ne passe pas dans les variations de l'inclinaison de son orbite, depuis 5° 0′ jusqu'à 5° 18′.

CXII. *La rétrogradation des nœuds est au contraire la plus grande possible, quand la ligne, qui les joint, passe par les quadratures. Dans le passage de cette ligne des quadratures aux sysigies ils rétrogradent moins, jusqu'à ce qu'ils deviennent stationnaires, lorsque la ligne, qui les joint, concourt avec celle des sysigies.*

Car la ligne des nœuds étant dans les quadratures, la Lune dans chaque révolution ne passe que par deux points, où la force qui fait rétrograder les nœuds est nulle, & cette force est la plus grande qu'il soit possible, lorsque dans cette situation des nœuds la Lune arrive en même-temps & à la sysigie, & à la distance de 90° de ses nœuds; au lieu que dans les autres positions il y a quatre points où la

force perturbatrice des nœuds eſt nulle; ſçavoir les deux quadratures & les deux nœuds, & la diſtance de 90° des nœuds où cette force eſt la plus grande, ſe trouvant alors vers les quadratures où elle a peu d'effet, les nœuds doivent moins rétrograder pour cette double raiſon, juſqu'à ce que les nœuds tombant ſur les ſyſigies, & le Soleil ſe trouvant dans le plan de la Lune, il ne puiſſe l'affecter ni d'un côté ni d'un autre, ni par conſéquent faire varier les nœuds, qui par là ſeront ſtationnaires dans toute cette révolution.

Newton calcule l'effet de cette force, il trouve que les nœuds doivent rétrograder d'environ 19° 18′ 1″ par an, & les Tables aſtronomiques font ce mouvement de 19° 21′ 21″, dont la différence n'eſt pas $\frac{1}{300}$ du mouvement total des nœuds dans une année, ou la $\frac{1}{5700}$ partie du tout dans une révolution des nœuds; en calculant même plus exactement ce mouvement par ſa cauſe, la théorie & l'obſervation s'accordent à fort peu de ſecondes près.

CXIII. Tout dépoſe donc en faveur de la gravitation univerſelle, & les phénomènes les plus compliqués en ſont des ſuites

suites nécessaires. Avant *Newton* les Astronomes n'avoient pû assujettir la Lune à aucune loi, bien éloignés de pouvoir donner les raisons physiques de ses inégalités, toute leur habileté consistoit à sauver, par quelqu'hypothèse Astronomique, les irrégularités ou apparentes contradictions de son cours. *Newton* a, d'une main habile, déchiré le voile qui couvroit la nature, & a saisi le ressort simple & fécond qui produit des mouvemens si admirables & si variés. Quelqu'irrégulier que soit le mouvement de la Lune, il fait voir qu'il peut néanmoins se rapporter au mouvement dans une ellipse mobile, en supposant que cet orbe s'incline sur son foyer par des oscillations alternatives, selon la suite & contre l'ordre des signes, mais plus grandes selon la suite des signes, avec des vibrations aussi alternatives de haut en bas & de bas en haut pour donner les différentes excentricités, & une troisiéme oscillation autour de la ligne de ses nœuds, qui en changera continuellement la position, & lui fera faire une révolution contre l'ordre des signes en 18 ans 224 jours 5 heures; il calcule par leur cause toutes ces irrégularités, & cette cause si une & si simple atteint à

une telle précision sur la quantité de ces effets, qu'aucune machine de statique ne peut être calculée plus exactement.

CXIV. Il se présente cependant une difficulté qu'il est important de résoudre.
» La force d'attraction résidante dans les
» corps est comme la masse divisée par
» le quarré de leur distance. La Lune
» placée en conjonction est éloignée de
» nous de 60 demi-diamètres de la
» Terre, & du Soleil de 21940 de ces
» rayons. Le Soleil est un million de fois
» plus gros que la Terre, & par consé-
» quent d'autant plus fort. En quarrant
» les éloignemens du Soleil & de la Terre
» par rapport à la Lune, le Soleil n'exer-
» ce sur elle que la 481263600me partie
» de sa force, & la Terre que la 3600e
» de la sienne: or le calcul démontre que
» cette force du Soleil est à celle de la
» Terre en plus grande raison que 7 à 1;
» & par conséquent cet Astre doit arra-
» cher la Lune à la Terre. »

Mais outre qu'on confond dans ce calcul le volume du Soleil avec sa masse, qui est moindre, & qui n'est que 170 mille fois plus grande que celle de la Terre, on oublie que la diminution de la pesanteur de la Lune sur la Terre n'est point égale

à toute l'impreſſion du Soleil ſur elle, mais ſeulement à la différence de ſon action ſur ces deux Planètes; que par le ſurplus la Terre & la Lune ſont ſoutenues également dans leur mouvement annuel; que quelle que fût l'impreſſion totale du Soleil ſur la Lune & la Terre, pourvu que de part & d'autre elle fût égale & ſoutenue par une viteſſe proportionnée, elles ſe mouvroient librement autour du Soleil comme foyer commun, ſans que leurs mouvemens reſpectifs autour de leur centre commun de gravité, fuſſent troublés par cette troiſiéme force.

Cela eſt conforme tout à la fois, & à l'expérience & à ce principe reçu, que *les mouvemens communs ne troublent point les mouvemens particuliers*. Ce n'eſt donc qu'à l'inégalité des actions du Soleil ſur la Terre & ſur la Lune, & au non parallélisme de ces actions, que ſont dûes les *anomalies* de ce Satellite : or il s'en faut bien que cette différence ſoit à la peſanteur de la Lune ſur la Terre comme 7 à 1; nous avons vu au contraire qu'elle n'a avec elle que le rapport de 1 à 89 à la conjonction.

Si, faiſant abſtraction de tout mouvement projectile & de la force attractive

du Soleil, on considere la Terre & la Lune livrées à leur attraction réciproque, elles tendront à se réunir à leur centre commun de gravité avec des vitesses réciproques à leurs masses, & s'y réuniront en effet si elles ne reçoivent aucune autre impulsion ; mais si dans le moment où elles commencent à tomber l'une vers l'autre, elles reçoivent une force projectile réciproque à leurs masses, elles seront soutenues à leurs distances, & tourneront autour de leur centre de gravité.

Les choses en cet état, & faisant attention à la force attractive du Soleil, ces deux corps tournant l'un autour de l'autre, tomberont ensemble sur cet Astre, si une seconde force projectile ne les retient; mais si également affectées par le Soleil, ces Planètes reçoivent toutes deux, selon l'ordre des signes, des impulsions parallèles & suffisantes, elles continueront de tourner autour de leur centre de gravité par leurs mouvemens particuliers, & tourneront en commun autour du Soleil. Seulement leurs mouvemens particuliers seront un peu troublés, si les actions du Soleil sur ces deux Planètes ne sont pas égales, & le trouble sera proportionné, non à toute l'action du Soleil sur ces deux

Planètes, mais à la différence très-petite de cette action ; c'eſt le cas de la Lune & des autres Satellites.

CXV. Si au lieu de cette manière de concevoir les choſes, on veut conſidérer le mouvement vrai de la Lune dans l'eſpace abſolu, ou, ce qui eſt le même, dans un plan immobile & ſous une ſeule impulſion, on trouvera le même réſultat ; la Lune décrira une courbe unique de la nature des épicycloïdes, & ne ceſſera point de tourner autour de la Terre en tournant autour du Soleil.

Si l'on ſuppoſe la Lune en conjonction avec la Terre, ſe mouvant au-deſſous d'elle dans une courbe concave vers le Soleil avec une viteſſe qui ſoit de la $\frac{1}{28}$ partie moindre que celle de la Terre, la diſtance des deux Planètes pourra être telle, que la force du Soleil étant conſidérablement diminuée par l'attraction contraire de la Terre, qui effectivement la diminue d'un ſixiéme & demi dans la conjonction, la viteſſe de la Lune ſoit trop grande par rapport à ſa peſanteur ainſi diminuée pour décrire un cercle à cette diſtance ; la Lune s'élevera donc au-deſſus de la courbe ou du cercle qu'elle décrit, & tracera un orbe extérieur &

plus élevé. Pendant que la Lune s'élevera ainsi, la Terre fuira à raison de sa plus grande vitesse, & ses deux Planètes se trouveront en quadrature.

La Lune continuellement attirée par la Terre depuis la conjonction jusqu'à la quadrature, aura, par cette somme de diminutions faites sur sa pesanteur & par la diminution naturelle provenant de son élévation, trop de vitesse par rapport à sa pesanteur actuelle, pour décrire un cercle autour du Soleil, à ce point où elle est en quadrature; elle continuera donc de s'élever toujours dans un orbe concave vers le Soleil & extérieur à celui de la Terre, & parviendra à l'opposition par un mouvement accéléré.

En effet, la Terre aura non-seulement diminué la pesanteur de la Lune sur le Soleil par son attraction, mais elle aura continuellement accéléré son mouvement en long depuis la conjonction jusqu'à la quadrature; ce qui ne se sera fait que peu-à-peu; au lieu que depuis la quadrature la Lune se mouvra avec la somme acquise de ces accélérations, applatira son orbe comme par degrés par l'attraction longitudinale de la Terre, & augmentera de vitesse par cette dispo-

ſition ſeule de l'orbe ; ce qui fera parcourir à la Lune ſon ſecond quartier plus vîte que le premier, & la mettra en état de parvenir à l'oppoſition.

Alors la Lune aura une plus grande viteſſe que la Terre, qui aura été retardée par la Lune pendant tout ce temps ; mais quoiqu'à ce lieu de l'oppoſition, la viteſſe de la Lune ſoit plus grande que celle qu'il faut pour décrire un cercle à cette diſtance par l'attraction ſeule du Soleil, comme elle ſera attirée par la ſomme des forces de la Terre & du Soleil, elle aura trop de peſanteur par rapport à ſa viteſſe pour décrire un cercle à cette diſtance. Elle deſcendra donc au-deſſous du cercle tracé à cette hauteur, ſe mouvra par une viteſſe accélérée, devancera la Terre ſelon l'ordre des ſignes, coupera l'orbe que la Terre décrit dans un point plus oriental que la Terre, & ce ſera la ſeconde quadrature.

Avant que d'y être arrivée, ſon mouvement en long aura commencé d'être un peu retardé par la Terre, & le ſera toujours par la ſuite tant que la Lune deſcendra au-deſſous de l'orbe de la Terre, & la précédera ; la Terre au-contraire ſera un peu accélérée par la Lune ; ce qui

donnera à la Terre le temps d'arriver à la conjonction, d'autant que la pesanteur de la Lune sur le Soleil devenant continuellement moindre par la force de rétraction de la Terre, les effets du Soleil sur la Lune diminueront continuellement.

Dans le commencement de ce dernier quartier, la Lune se mouvra avec la somme des accélérations acquises successivement dans le troisiéme quartier, & cette somme ne sera que lentement & peu-à-peu détruite en parcourant ce dernier quartier; d'où il arrivera, à cause de ce surplus de vitesse dans le premier temps du mouvement, que la Lune parcourra la partie de sa courbe, qui est depuis la seconde quadrature jusqu'à la conjonction, plus vîte que celle qui s'étend entre cette quadrature & l'opposition ; ce qui donnera la *variation* de la Lune. A la conjonction la force du Soleil reçoit sa plus grande diminution, la force centrifuge l'emporte de nouveau sur elle, la Lune remonte, & se mouvant toujours autour du Soleil dans l'espace d'un an, par une courbe concave vers lui, elle décrit une *épicycloïde* qui a deux apsides dans l'intervale d'un mois, entre lesquelles elle est toujours

emportée, & qui embraſſant la Terre, équivaut à un cercle décrit autour d'elle, & tranſporté comme elle & avec elle autour du Soleil dans l'eſpace d'un an. Ce cercle emporté avec la Terre & décrit tous les mois par la Lune, trace au vrai cette *épicycloïde* dans l'eſpace abſolu, & cette épicycloïde donne toutes les apparences de ce cercle décrit & tranſporté.

CXVI. Les choſes ainſi conçues, il s'enſuit qu'en hiver, la Terre étant périhélie, & par conſéquent la force du Soleil plus grande ſur la Lune en conjonction, ce Satellite doit s'élever moins qu'auparavant au-deſſus du cercle tracé à la diſtance de la conjonction; d'où il paroît ſuivre que ſa diſtance de la Terre ſera moindre, ſon orbite plus rétrécie, & le temps de ſa révolution ſynodique plus court en hiver qu'en été, ce qui eſt le contraire des faits obſervés; mais cette conſéquence eſt auſſi le contraire de ce qui ſuit du principe.

En hiver la force du Soleil plus grande courbant davantage le mouvement de la Lune, celle-ci doit d'abord par l'action de la Terre s'élever moins au-deſſus du cercle tracé à la conjonction; par conſéquent l'épicycloïde que décrit la

Lune, doit rencontrer & couper plus tard, c'eſt-à-dire, dans un point plus avancé, ſelon la ſuite des ſignes, l'orbe de la Terre ; d'où il ſuit que cette Planète ſe ſera mûe plus long-temps dans ſon orbe, & ſe ſera plus éloignée de la Lune, quand celle-ci arrivera à la quadrature ; ce qui donnera & le temps plus long & la diſtance plus grande que dans tout autre temps, conformément à l'obſervation.

Depuis la quadrature juſqu'à l'oppoſition, la viteſſe de la Lune ſera moins accélérée par la Terre devenue plus diſtante, & ſon mouvement moins courbé par la même raiſon ; il faudra donc que ces accélérations s'accumulent pendant un plus long-temps pour que la Lune parvienne à l'oppoſition, & ce Satellite montant toujours pendant ce temps, ſon orbe continuera d'avoir plus d'expanſion, & cette partie de ſon mois d'avoir plus de durée qu'en été.

A l'oppoſition la Lune plus éloignée ſera moins attirée par la Terre & le Soleil, courbera moins ſon mouvement, deſcendra moins au-deſſous du cercle qui paſſe par le lieu qu'elle occupe, & ira couper l'écliptique plus tard & dans un point plus éloigné.

Depuis la ſeconde quadrature la Lune, ſaiſie par une plus grande force du Soleil, courbera ſon mouvement davantage, deſcendra plus près de cet Aſtre, dont les effets ſeront moins diminués par l'action de la Terre rendue plus foible par l'éloignement, aura dès-lors plus de viteſſe, qui, employée en grande partie dans le ſens vertical, donnera à la Terre la facilité & le temps de ſe placer en ſyſigie, mais à une diſtance de la Lune plus conſidérable qu'auparavant.

On peut donc concevoir tous les effets de la Lune en rapportant ſon mouvement à une ſeule impulſion & à une courbe unique, concave vers le Soleil, de la nature des épicycloïdes, ayant deux apſides qui embraſſent la Terre, & entre leſquelles la Lune ſe meut dans l'eſpace d'un mois.

La force ſeule du Soleil lui eût fait décrire une ellipſe comme à la Terre & aux autres Planètes, ſi ſa viteſſe eût été ſuffiſante, & ſa peſanteur ſur le Soleil non-troublée par l'attraction de la Terre; mais celle-ci diminuant à peu-près d'un ſixiéme l'attraction effective du Soleil, la Lune ne peut plus décrire cette ellipſe ni aucune autre courbe intérieure & ren-

fermée ſous l'écliptique. Elle s'éleve & s'abaiſſe alternativement & par degrés au-deſſus & au-deſſous de l'orbe de la Terre, ſuit cette Planète & la précede, ſe place enſuite en ſyſigie avec elle au-deſſus & au-deſſous de l'écliptique, & décrit ainſi un orbe d'une courbure très-inégale, moindre à chaque apſide inférieure ou à la conjonction, plus grande à chaque apſide ſupérieure ou à l'oppoſition, le même que celui que décrit la Lune dans l'eſpace abſolu en vertu des deux mouvements que nous lui avons ſuppoſés. *Voy. Maclaurin, découv.* &c.

CHAPITRE VIII.

De la figure des Aſtres.

CXVII. Si la Terre étoit fluide, & n'avoit point de mouvement ſur ſon axe, la gravitation égale de ſes parties les unes vers les autres lui donneroit une figure exactement ſphérique. Une colonne plus grande de la ſurface au centre, peſeroit plus ſur le centre, éleveroit par ſon poids les colonnes plus courtes, baiſſeroit elle-

même à proportion, jusqu'à ce que toutes les colonnes, devenues égales, se soutinssent & se balançassent mutuellement par l'égalité de leurs poids.

Si dans cet état la Terre eût été forcée de se mouvoir autour du Soleil, ses parties les plus proches & les plus éloignées de cet Astre se fussent mûes autour de lui d'un même mouvement angulaire, eussent conservé leurs situations les unes par rapport aux autres, & la Terre n'eût point changé de figure.

Mais dès-qu'elle aura commencé à tourner sur son centre d'un même mouvement angulaire, toutes ses parties auront acquis une force centrifuge opposée à la pesanteur, & cette premiere force aura détruit ou soutenu une partie de la seconde. La pesanteur étant la même à la même distance du centre, & sur tous les points de la même surface sphérique, il ne fût point arrivé d'altération dans la figure de la Terre, si la force centrifuge eût été la même aussi dans tous les points de la même couche ou à égales distances du centre.

Mais l'équateur de la Terre ayant plus de vitesse dans sa rotation diurne que les autres cercles parallèles, il a plus de force

centrifuge (*n.* 15.) en raiſon de la plus grande longueur de ſon rayon. Cette force centrifuge, toujours dirigée ſelon le rayon du cercle qui eſt décrit, dejà plus grande à l'équateur, que dans les cercles parallèles, y eſt plus directement opposée à la peſanteur toujours dirigée perpendiculairement à la ſurface ſelon le rayon de la ſphère; la gravité des parties de la Terre eſt donc par cette double raiſon plus diminuée à l'équateur qu'aux pôles & que dans les autres cercles parallèles par la force centrifuge; & par conſéquent les autres colonnes, celles des pôles principalement, peſant plus ſur le centre que la colonne de l'équateur, ont dû éléver continuellement cette colonne, & s'abaiſſer elles-mêmes de plus-en-plus, juſqu'à ce que l'excès de la hauteur, ou de la matiere ſous l'équateur, eût compenſé l'excès de peſanteur ſous les pôles, & dans les autres cercles parallèles; ce qui aura donné à la Terre la figure d'un ſphéroïde applati par les pôles, comme nous l'apprennent les meſures & les expériences du Pendule.

En effet, les temps des oſcillations des Pendules de même longueur, ſont comme leur poids : or on a conſtamment

trouvé qu'un Pendule qui oſcille en une ſeconde dans les régions ſeptentrionales, ſe meut plus lentement lorſqu'il eſt tranſporté ſous l'équateur, & doit y être accourci pour oſciller exactement dans une ſeconde; donc ſa gravité y eſt moindre, & la Terre plus élevée que dans les régions ſeptentrionales.

Le Pendule de *M. Richer* qui oſcilloit à *Cayenne* dans une ſeconde de temps, étoit plus court qu'à Paris d'une ligne & un quart; donc ſouſtrayant un ſixième de ligne pour l'allongement produit par la chaleur, qui eſt tout ce que les expériences faites ſur la dilatation des corps, par la chaleur, peuvent permettre, il reſtera une ligne & un douziéme de ligne pour la différence dûe à la diminution de la peſanteur; ce qui donne 17 milles d'Angleterre pour l'excès de la hauteur de la Terre à l'équateur, ſur ſa hauteur aux pôles. *

* Non-ſeulement les meſures & les expériences prouvent que la Terre ferme a réellement la figure d'un ſphéroïde applati; mais le raiſonnement même prouve que ſi la Terre a été originairement ſolide, le Créateur a dû lui donner cette figure; car ſi la Terre ferme étoit ſphérique, l'Océan plus élevé par ſa force centrifuge ſe répandroit ſur toutes les régions de l'équateur, & s'abaiſſant plus que la Terre vers les pôles, laiſſeroit à ſec toutes

CXVIII. Puiſque c'eſt la diminution de la peſanteur par la force centrifuge qui cauſe le raccourciſſement des axes des Planètes qui tournent ſur leurs centres, plus le rapport de la force centrifuge à la peſanteur ſera grand, plus grande ſera la différence des deux axes ; & c'eſt pour cette raiſon qu'on n'apperçoit point l'applatiſſement du Soleil, qui mettant 25 jours à tourner ſur ſon centre, n'a que fort peu de force centrifuge par rapport à l'énorme peſanteur des points de ſa ſurface, au lieu que Jupiter, faiſant une rotation entière en 9 h. 56′, & ayant par-là beaucoup de force centrifuge, a un applatiſſement fort ſenſible, & un rapport entre ſes axes, moyen entre celui de 11 à 10, & celui de 14 à 13.

Cet applatiſſement des pôles, par le rapport de la force centrifuge à la peſanteur, a néanmoins des bornes qu'il ne peut paſſer. Il eſt le plus grand poſſible lorſque la force centrifuge eſt égale à la peſanteur ; & ſi la force centrifuge

les régions polaires : au lieu que l'obſervation montre que vers les pôles la Terre-ferme n'eſt pas plus élevée au-deſſus du niveau de l'Océan que vers l'équateur. Dans le cas de la Terre originairement ſolide, la théorie ne pourroit donner le rapport des axes.

devenoit

devenoit plus grande, les parties de la Planète se dissiperoient. Le rapport des axes seroit comme 905 à 400, ou à peu-près comme 9 à 4, si la force centrifuge étoit égale à la pesanteur.

CXIX. Nous avons vu (*nos.* 13 & 14.) que les parties de la Terre se meuvent 17 fois trop lentement pour avoir une force centrifuge égale à leur poids, & qu'un corps sous l'équateur n'y perd par elle que la $\frac{1}{289}$ partie de sa gravité. D'où il suivroit, à s'en tenir à cette cause, que l'équateur ne seroit plus élevé que les pôles que de la $\frac{1}{289}$ partie.

Mais une autre cause vient se joindre à celle-là pour en augmenter l'effet. Si la figure de la Terre dépend de la pesanteur, la pesanteur elle-même dépend de la nouvelle figure qu'a pris la Terre, & celle-ci une fois applatie par la force centrifuge, cette seule figure rend la pesanteur plus petite à l'équateur qu'au pôle, indépendamment de la force centrifuge. La propriété qu'a la pesanteur (*n.* 71.) d'augmenter à la surface d'un corps à proportion que cette surface est plus élevée, n'a lieu (*n.* 70.) que dans les sphères. La Terre devenue sphéroïde, les parties de son équateur perdent par cela

même de leur gravité à meſure qu'elles s'élevent & s'éloignent du centre de la Terre. Telle partie qui s'eſt élevée par la force centrifuge, a acquis par cela même un ſurcroît de cette force, a perdu de ſa peſanteur par ſon élévation, & ſe trouvant attirée vers le par haut les parties qui ſont au-deſſus d'elle, & qui n'y euſſent point eu d'effet (*n.* 71.) ſi la Terre fût demeurée ſphérique, elle éprouve une quatriéme cauſe d'élévation, qui augmente la différence des axes, & la porte au-delà de $\frac{1}{289}$.

Pour trouver le rapport précis de cette élévation, il faudroit combiner toutes les forces des particules du ſphéroïde avec tous les quarrés de leurs diſtances, & cette détermination eſt infiniment pénible. Pour en venir à bout, *Newton* a cherché le cas le plus ſimple, & ſuppoſant le rapport de l'axe au diamètre de l'équateur comme 100 à 101, il trouve, pour que la Terre pût prendre une telle forme, que la force centrifuge ſous l'équateur devroit être $\frac{4}{505}$ de la gravité: or $\frac{4}{505}.\ \frac{1}{100} :: \frac{1}{289}.\ x = \frac{1}{229}$. Donc ſi la premiére force centrifuge rend la Terre plus élevée ſous l'équateur que ſous les pôles de la $\frac{1}{100}$ partie de la hauteur ſous les pôles, la ſeconde qui eſt la force centri-

fuge actuelle, la rendra plus élevée à l'équateur qu'aux pôles de la $\frac{1}{229}$ partie de sa hauteur ou distance au centre sous les pôles, & par conséquent le rapport du diamètre de l'équateur à l'axe de révolution ne sera pas $\frac{289}{288}$, ou celui de 289 à 288; mais $\frac{229+1}{229}$ ou celui de 230 à 229.

CXX. Le rapport des axes de 230 à 229 que donne la théorie dans la supposition que la Terre est homogène dans toute sa profondeur, est à peu-près celui que donnent toutes les observations faites sur le Pendule. Dans toutes les expériences faites sur la diminution de sa longueur pour l'assujettir à battre les secondes dans les différentes latitudes, on a toujours trouvé que la diminution de la pesanteur, en allant du nord au sud, étoit plus grande qu'elle ne seroit, si la diminution totale depuis le pôle jusqu'à l'équateur étoit plus de $\frac{1}{230}$.

Or c'est un principe d'hydrostatique que le rapport des axes doit être en raison inverse de la somme des poids au pôle & à l'équateur; car au centre de la Terre allongée vers l'équateur, concevez une couche infiniment mince, & qu'elle soit en équilibre; il est clair que l'équilibre subsistera, si on presse tous les points de

ſa ſurface avec une force égale. Or ſi on vient à mettre ſur cette couche une couche nouvelle, auſſi infiniment mince, compoſée d'une infinité de petits cylindres, dont les hauteurs à l'équateur & aux pôles ſoient en raiſon renverſée des forces de la peſanteur, la preſſion cauſée par ces petits cylindres ſera la même, & l'équilibre ſubſiſtera.

Mettez continuellement d'autres couches, dans leſquelles on obſerve les mêmes conditions par rapport à l'épaiſſeur qu'elles ont dans chacun de leurs points, & l'équilibre de la maſſe ne dépendra que de l'équilibre de la premiere ſurface, qui ayant été priſe à volonté, peut être regardée comme une particule infiniment petite, qui ne peut pas manquer d'être en équilibre.

Donc pour cet équilibre il faut dans la ſphère allongée à l'équateur, que les épaiſſeurs des couches concentriques ſoient aux pôles, & à l'équateur en raiſon renverſée de leurs peſanteurs, les ſommes en raiſon renverſée des ſommes; & par conſéquent l'axe & l'équateur en raiſon renverſée de la ſomme des peſanteurs au pôle & à l'équateur; donc puiſque le retardement du Pendule donne

ces poids en raiſon de 230 à 229, il faut que le rapport de l'axe au diamètre de l'équateur ſoit celui de 229 à 230.

Cependant les meſures des degrés du Méridien, priſes en France & en Laponie, donnent le diamètre de l'équateur de 6562480 toiſes, & l'axe de la Terre de 6525600; ce qui donne le rapport de ces axes à peu près dans la raiſon de 178 à 177 plus grande que celle de 230 à 229.

Mais il me ſemble qu'on ne doit point être étonné de cette différence; la Terre en ſe durciſſant a pû éprouver ce qui arrive à la pâte qui ſe durcit, à l'eau qui ſe gêle, où il y a toujours beaucoup de cavités. Leur grandeur ou leur ſomme a dû prévaloir du côté de l'équateur, où l'excès de force centrifuge ou expanſive les favoriſoit; ce qui aura un peu augmenté le rapport des axes ſans faire varier celui des poids, & l'on conciliera par ce moyen les obſervations ſur le Pendule avec les meſures actuelles. Les poids ſeront dans le rapport de 229 à 230, & les axes pleins dans le même rapport; tandis que les axes en totalité ſeront dans celui de 177 à 178, ou même de 174 à 175, ſelon le degré du Méridien, meſuré au Pérou.

On pourroit, en faisant diverses hypothèses sur la densité réguliére, mais variable des couches de la Terre, trouver par la théorie le rapport des axes comme 177 à 178, ou même comme 174 à 175; mais alors ce rapport des axes feroit varier celui des poids qui nous est donné par le Pendule, & il paroit que ce n'est pas là le vrai moyen de tout concilier.

Il faut donc regarder le rapport de 230 à 229, comme le rapport vrai des axes, & rejetter le surplus que donnent les mesures ou sur les cavités dont nous venons de parler, ou sur les erreurs inévitables, dans ces mesures, beaucoup plus compliquées que les observations sur le Pendule; qu'il ne faudroit pas même porter au-delà de 60 toises dans deux opérations, qui demandent chacune un grand nombre d'observations Astronomiques & Géographiques, pour ramener le tout en rapport de 230 à 229; ou enfin sur les sables que la Lune amoncelle continuellement entre les tropiques, en y accumulant les eaux & les y faisant refluer des quadratures placées au-delà des tropiques, comme le suppose M. de Buffon.

En effet, dans le rapport des axes de

230 à 229, la différence entre les deux diamètres, eſt de 6 lieues & demie d'élévation de plus ſous l'équateur que ſous les pôles. Dans le rapport de 174 à 175, ce ſurplus d'élévation eſt environ de huit lieues $\frac{1}{2}$, ce qui fait entre ces deux rapports deux lieues de différence ; & par conſéquent il aura fallu que dans chaque hémiſphère l'équateur ſe ſoit élevé d'une lieue de plus, & que le pôle ſe ſoit abaiſſé de la même quantité : or pluſieurs de nos montagnes ont une lieue ; les profondeurs de la Mer s'abaiſſent ſouvent de la même quantité au-deſſous du niveau, la ſomme de ces différences, qui eſt deux lieues, n'indiqueroit-elle donc pas la profondeur de la Terre remuée, proportionnelle à l'excès de la différence des axes que donnent les meſures ſur la théorie ? Dans le rapport de 229 à 230 le Pendule tranſporté à l'équateur iroit comme il va ; dans le rapport de 174 à 175, par l'addition d'une matiere étrangere, il ſe trouveroit plus élevé, moins peſant par ce plus d'élévation, & ſembleroit devoir être plus raccourci que dans le rapport de 229 à 230 ; mais ſi par ce plus d'élévation il peſe moins, il peſe plus par cette addition de matiere étrangere, & tout ira à peu

près comme dans le rapport de 229 à 230; car quoique le volume de matiere sur-ajoutée surpasse le quarré d'élévation, cependant, comme c'est une terre remuée, elle a nécessairement moins de densité que la terre ancienne. *

CXXI. Ce qui confirme que le rapport vrai des axes est originairement de 230 à 229, c'est qu'en partant de cette supposition, on trouve les axes de Jupiter dans un rapport qui approche plus de l'observation, qu'en faisant ceux de la Terre comme 175 à 174, ou même comme 178 à 177.

Nous avons vu (*n.* 71.) qu'à la surface des sphères inégales, mais de même den-

* Ce qui prouve d'une maniere très-plausible que la Terre a souffert des altérations considérables, soit dans sa formation, soit après, & qu'ainsi les mesures ne doivent pas s'accorder exactement avec la théorie; c'est qu'il est aujourd'hui reconnu que les Méridiens de la Terre ne sont pas des courbes semblables, ni entr'elles, ni dans leurs différentes parties. M. l'Abbé *la Caille* ayant mesuré un degré au Cap de Bonne-Espérance à la latitude australe de 33° 18′, l'a trouvé égal à celui qui répond en France à la latitude de 49°; & le P. *le Maire* mesurant un degré en Italie l'a trouvé moindre qu'en France à la même latitude. L'attraction des montagnes, les erreurs inévitables dans les mesures, les suppositions que l'on fait de la ligne verticale perpendiculaire à l'horison, de son passage & de celui du Méridien par l'axe de la Terre, laisseront toujours quelques incertitudes sur le rapport vrai des axes.

ſité, les peſanteurs ſont en raiſon des diamètres de ces ſphères; & (*n.* 15.) que ſi les temps périodiques des rotations de ces ſphères ſont égaux, les forces centrifuges de leurs ſurfaces ſont de même en raiſon de leurs diamètres; donc en général, ſi une Planète plus grande ou moindre que la Terre, mais de la même denſité qu'elle, achevoit ſa révolution diurne en même-temps, il y auroit à la ſurface de cette Planète & de la Terre le même rapport de leur force centrifuge à leur peſanteur, & par conſéquent le même rapport entre leurs axes, c'eſt-à-dire, qu'en ce cas la différence des axes de Jupiter ſeroit la même que celle des axes de la Terre.

Mais ſi Jupiter vient à augmenter ſa viteſſe diurne, la différence de ſes axes augmentera en raiſon de l'augmentation de ſa force centrifuge, & par conſéquent en raiſon du quarré de ſa viteſſe, ou, ce qui eſt le même, à cauſe de l'identité du diamètre de Jupiter en ces deux cas, en raiſon inverſe du quarré du temps de ſa révolution ſur ſon axe.

Si en même-temps Jupiter venoit à diminuer de denſité, ſon volume demeurant le même, la peſanteur à la ſurface

diminueroit en même proportion, & la force centrifuge demeurant la même, la différence des axes augmenteroit en même raiſon que ſa denſité auroit diminué.

Donc la différence de ſes axes, dans ces deux derniers cas, ſeroit à ſon petit axe dans le premier cas, & par conſéquent au petit axe de la Terre, en raiſon composée de l'inverſe du rapport de ſa denſité à celle de la Terre, & du rapport auſſi inverſe du quarré de ſon temps périodique au quarré de celui de la Terre.

Or la Terre fait ſa révolution en 23$^{h.}$ 56', Jupiter la ſienne en 9$^{h.}$ 56', & les quarrés de ces nombres ſont comme 29 à 5, les denſités de la Terre & de Jupiter ſont comme 400 & 94 $\frac{1}{2}$, & la différence des axes de la Terre eſt $\frac{1}{229}$; donc la différence des axes de Jupiter eſt à ſon petit axe, ou au diamètre qui paſſe par ſes pôles, comme $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ à 1, & en faiſant l'opération, comme 1 à 9 $\frac{1}{3}$ très-prochainement; & par conſéquent le diamètre de l'équateur de Jupiter eſt à l'axe de ſa révolution diurne, comme 10 $\frac{1}{3}$ à 9 $\frac{1}{3}$, ce qui ne peut approcher plus près de l'obſervation dans des opérations auſſi délicates que celles qu'il faut faire pour meſurer la différence des axes de

cette Planète ; au lieu que ſi dans ce calcul on ſubſtitue $\frac{1}{177}$ pour $\frac{1}{229}$, on trouve le rapport des axes de Jupiter dans la raiſon de 8 $\frac{1}{4}$ à 7 $\frac{1}{4}$ beaucoup trop grande pour être conciliée avec l'obſervation.

CXXII. La figure de la Lune dépend d'un autre principe, parce qu'elle n'a de rotation ſur ſon axe que celle qui provient de l'inégalité de ſa figure. L'action de la Terre étant oblique ſur les parties de la Lune, placées en quadrature, doit ſe décompoſer en deux forces ſur ces parties, l'une parallèle à la ligne qui joint les centres de la Terre & de ce Satellite, l'autre tendante au centre de ce Satellite, dont l'effet eſt d'augmenter la peſanteur de ces parties vers la Lune. Les parties de la Lune qui ſont vers les quadratures peſent donc plus ſur la Lune que celles qui ſont vers les ſyſigies ; & ſi cet Aſtre a été originairement fluide, ou s'il eſt comme la Terre recouvert en tout ou en partie, d'une Mer profonde, il a dû s'applatir vers les quadratures & s'allonger dans la ligne qui joint ſon centre & celui de la Terre, & en traitant du flux & reflux de la Mer, nous verrons que cet allongement de la Lune doit être un peu plus grand du côté de la Terre, que du

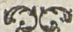
côté opposé; d'où il suit que ce côté plus pesant de la Lune devra toujours être le plus bas & le plus près du centre de la Terre, à laquelle la Lune sera forcée de montrer toujours la même face.

Mais comme en vertu de la révolution de la Lune autour de la Terre, son grand axe affecte de garder le parallélisme, il tend par la force de ce mouvement à s'écarter à tous momens de la ligne qui joint les centres de la Terre & de la Lune, & à tous momens aussi il y est ramené par son poids, autrement il n'y auroit point équilibre entre les parties de la Lune. La Lune par cette rotation de son grand axe acquerra donc une révolution sur son centre autour d'un diamètre à peu-près perpendiculaire sur le plan de son orbite dans l'espace d'un mois.

Or comme le mouvement de la Lune autour de la Terre est très-inégal, & que sa vitesse augmente vers le périgée, il doit arriver alors que son grand axe soit transporté plus vîte par son mouvement en long, qu'il ne peut être rapporté par son poids ou par sa rotation; ce qui doit nous montrer vers le bord occidental de la Lune des parties cachées auparavant, lesquelles seront de nouveau soustraites à

notre vûe lorſque la Lune remontera à ſon apogée. Par cette continuelle rotation de ſon grand axe, la Lune aura acquis ſur ſon centre une viteſſe uniforme, égale à ſon mouvement moyen, & cette rotation ſurpaſſant dès-lors la viteſſe actuelle à l'apogée, la Lune nous découvrira vers ſon bord oriental de nouvelles parties ; c'eſt ce qu'on nomme *la libration de la Lune en longitude.*

L'inclinaiſon de l'orbe de la Lune changeant continuellement, la force qui cauſe ce changement n'affectant point les axes de la Lune, celui autour duquel elle tourne, ne peut toujours être perpendiculaire ſur le plan de ſon orbite ; il lui ſera donc toujours plus ou moins incliné. Or cet axe de rotation étant dirigé à peu-près dans la ligne des quadratures, & devant conſerver ſon paralléliſme comme l'axe de la Terre par rapport au Soleil, tantôt il dirigera un peu plus vers nous ſon pôle *boréal*, tantôt il nous tournera ſon pôle *auſtral*, & nous fera découvrir alternativement de nouvelles parties vers ces pôles ; ce qui s'appelle *la libration de la Lune en latitude.*



CHAPITRE IX.

De la précession des Equinoxes.

CXXIII. L'AXE de la Terre forme avec l'écliptique un angle de $66\frac{1}{2}$ degrés, & le plan de cette orbite un angle de $23°\frac{1}{2}$ avec le plan de l'équateur terrestre, de maniere que le plan de l'équateur prolongé ne rencontre le plan de l'écliptique, où est toujours le Soleil, qu'en deux points opposés qu'on nomme *équinoctiaux*. Dans tous les autres points le Soleil est hors de ce plan ; il est au nord de ce plan en été & pendant la moitié de l'année, & au midi pendant l'autre moitié en hiver. On a observé que ces points équinoctiaux sont rétrogrades, & que l'année *tropique* est plus courte que l'année *sydérale*, de maniere que d'une année à l'autre le retour du Soleil au même équinoxe arrive 50″ plutôt ; ce qui s'appelle *la précession des Equinoxes*.

Pour concevoir comment cet effet est produit, supposons qu'un grand nombre de petites Lunes circulent en même-

temps autour de la Terre, près de sa surface, & dans le plan de son équateur, par conséquent dans un plan incliné à l'écliptique & aux plans où se trouvent le Soleil & la Lune; il est clair que par rapport à la vraie Lune & par rapport au Soleil, elles seront dans la même situation que la Lune dans son orbite par rapport au Soleil, qu'elles seront sujettes aux mêmes inégalités, que leurs nœuds iront en rétrogradant, & que l'inclinaison de leurs orbites changera par la même raison. Augmentons le nombre de ces Lunes jusqu'à ce qu'elles se touchent & forment un anneau solide adhérant à la Terre, la ligne des nœuds continuera de rétrograder.

Or, il y a en effet un anneau semblable adhérant à la Terre; cette Planète étant un sphéroïde applati par les pôles, la matiere qui éleve l'équateur doit être conçûe comme une zône ou anneau concentrique à la Terre, placé sur son équateur, incliné comme lui au plan de l'écliptique, coupant ce plan en deux points ou *nœuds* qui doivent continuellement rétrograder, qui seront par-là atteints d'autant plutôt, & donneront *la précession & anticipation des équinoxes.*

CXXIV. Les nœuds de la Lune, en rétrogradant, parcourent environ 20° dans une année. Si la même force agiſſoit ſur l'anneau qui ceint la Terre, & y agiſſoit avec le même avantage, les nœuds de l'équateur terreſtre reculeroient de même de 20° en un an. Si cet anneau n'étoit pas adhérent, la différence de ſa maſſe d'avec celle de la Lune ne produiroit point de différence dans la viteſſe de la rétrogradation de ſes nœuds, parce que la force qui produit ce reculement, ne différant pas de la gravité, affecte & pénétre les maſſes, & procure à toutes une égale viteſſe.

Mais comme cet anneau eſt adhérent & que le Soleil qui fait rétrograder ſes nœuds n'agit que ſur lui, parce que lui ſeul eſt incliné à l'écliptique ou au plan du Soleil, cet anneau partage avec la maſſe énorme de la Terre, l'impreſſion qu'il reçoit, & ſa viteſſe eſt d'autant plus lente que ſa maſſe eſt plus petite par rapport à celle de la Terre qu'il doit mouvoir; de maniere que ſi toute la maſſe de cet anneau étoit ramaſſée ſur l'équateur, la viteſſe de ſa rétrogradation ſeroit à celle qu'il auroit, s'il n'étoit point adhérent, comme 4590

à

à 489813, selon le calcul de *Newton*.

De plus cet anneau, s'il n'étoit point adhérent, décriroit autour de la Terre un cercle dont le rayon seroit à celui de l'orbite de la Lune dans la raison de 1 à 60, & (*n.* 89.) la force perturbatrice de ses nœuds seroit originairement à la force perturbatrice des nœuds de la Lune, comme 1 à 60, ou dans la raison des rayons. Or quand les forces originaires qui troublent les nœuds, sont en raison des rayons, les degrés qu'ils parcourent dans un temps donné, sont comme les temps périodiques *; par conséquent ici

* La rétrogradation des nœuds étant continuelle, les espaces parcourus par ces nœuds, sont comme la somme des révolutions dans un temps donné, & comme la quantité de la rétrogradation dans une révolution. Or d'une part la somme des révolutions est en raison inverse des temps périodiques, ou comme $\frac{1}{t}$. De l'autre, la même inclinaison supposée, les arcs parcourus dans des temps infiniment petits proportionnels aux temps périodiques, sont en raison composée des forces & des quarrés de ces temps, & parce que les forces accélératrices sont comme les rayons dans ce cas, comme rtt; & la rétrogradation totale comme $\frac{rtt}{t} = rt$. Or dans des arcs quelconques le nombre des degrés est comme ces arcs divisés par les rayons, & par conséquent ici comme $\frac{rt}{r} = t$, ou en raison des temps périodiques; donc quand les forces perturbatrices sont comme les rayons, les troubles, & ici les mouvements des nœuds, sont comme les temps des révolutions périodiques, lorsqu'on les exprime en degrés ou parties de degrés.

comme $23^{h.}$ $56'$ à $27^{j.}$ $7^{h.}$ $43'$, & l'on auroit le mouvement annuel du nœud de l'équateur, au mouvement annuel de la Lune, ou à 20°, comme 23^{h} $56'$ à 27^{j} 7^{h} $43'$, ou comme 1436 à 39343, si l'anneau n'étoit pas adhérent à la Terre. Donc en composant cette raison avec celle qui exprime le rapport de son mouvement quand il est adhérent, on trouvera le mouvement annuel de ses nœuds à 20° parcourus par le nœud de la Lune dans l'espace d'un an, comme 1436×4590 à 39343×489813, ou comme 100 à 292369.

Ce rapport cependant n'est celui du mouvement des points équinoxiaux que dans la supposition que nous avons faite, que l'anneau de la Terre est tout entier ramassé sur l'équateur, au lieu qu'il forme une couche qui s'étend depuis l'équateur jusqu'aux pôles, où elle est fort mince, allant de-là, en s'épaississant de plus-en-plus, jusqu'à l'équateur; & l'on conçoit que tous les points de cette couche n'auront pas (*n.* 107.) la même efficace pour faire tourner la Terre.

Or M. *Newton* démontre que la force de cette couche ainsi répandue pour faire tourner la Terre & les points équino-

N

xiaux, eſt à celle qu'elle auroit ſi elle étoit toute raſſemblée ſur l'équateur, comme 2 à 5; c'eſt donc dans cette raiſon qu'il faut diminuer le rapport trouvé de 100 à 292369, & la rétrogradation annuelle des équinoxes ne ſera plus à 20° ou à celle des nœuds de la Lune, que dans le rapport de 10 à 73092; ce qui donneroit pour la rétrogradation des équinoxes 9'' 56''' 50'''' par an; mouvement qu'il eſt néceſſaire de diminuer encore en raiſon du ſinus de complément de l'inclinaiſon de l'écliptique au rayon total; ce qui ne donne plus pour le reculement des équinoxes que 9'' 7''' 20'''' par an par la force du Soleil.

Or le plan de l'équateur étant auſſi oblique ſur l'orbite de la Lune, cet Aſtre par la même raiſon doit influer ſur le mouvement de ſes nœuds, & ſe trouvant 320 fois plus près de la Terre que le Soleil, il doit avoir plus d'efficace ſur les points équinoxiaux. En comparant la hauteur des Marées avec la force du Soleil qui y concourt, *M. Newton* trouve que la force de la Lune eſt environ quatre fois plus grande que celle de cet Aſtre, & qu'ainſi le mouvement qu'elle produit dans les points équinoxiaux eſt de 40''

52‴ 52⁗ par an; ce qui donne la précession totale dans le cours de l'année de 50″ 0‴ 12⁗ conforme aux observations.

CXXV. Le plan de l'écliptique, dans lequel le Soleil est situé, faisant constamment un angle de 23° 30′, avec le plan de l'équateur, la partie de la précession qui vient du Soleil est sensiblement égale dans chaque révolution de la ligne des nœuds; mais il n'en est pas de même de la partie de la précession qui vient de l'action de la Lune.

Lorsque le nœud ascendant de la Lune entre au signe du Belier, l'angle que fait son orbe avec l'équateur est de $23^{\circ}\frac{1}{2} + 5^{\circ}\frac{1}{6} = 28^{\circ}\frac{2}{3}$; c'est la somme de son inclinaison à l'écliptique, & de l'écliptique à l'équateur. Ce nœud de la Lune étant rétrograde occupe successivement tous les points de l'écliptique en 19 ans, & parvient au signe de la Balance, qui est le nœud descendant de l'équateur, au bout d'à peu-près 9 ans; mais dans cette révolution du nœud, l'orbite de la Lune reste parallèle à elle même, & la même partie qui étoit tournée vers le nord, y est toujours tournée. Par là elle tombe alors entre l'équateur & l'écliptique, & quand

le nœud aſcendant eſt à la Balance, l'inclinaiſon de l'orbe lunaire à l'équateur n'eſt plus que de $20° \frac{1}{2} - 5° \frac{1}{6} = 18° \frac{1}{3}$; de ſorte que l'inclinaiſon de l'orbite de la Lune, par rapport au plan de l'équateur, croît & décroît pendant un peu plus de neuf ans, depuis $18° \frac{1}{3}$ juſqu'à $28° \frac{2}{3}$, & réciproquement.

Or la force perpendiculaire de la Lune ſur le plan de l'équateur, pour en faire rétrograder le nœud, eſt toujours proportionnelle au ſinus de l'inclinaiſon de l'équateur au plan de l'orbite de la Lune; & par conſéquent la préceſſion qui en provient, doit varier dans une période de neuf ans, & ſelon les obſervations de *M. Bradley*, être la plus grande & d'environ 58″ en un an, lorſque le nœud aſcendant de la Lune entre dans le ſigne du Belier, la plus petite & d'environ 43″ par an, lorſque ce nœud entre dans le ſigne de la Balance; enfin moyenne & d'environ $50'' \frac{1}{3}$ par an, lorſque les nœuds de la Lune ſont dans le colure des ſolſtices.

Par la même raiſon, la Terre aura une nutation dans ſon axe dans une période de dix-neuf ans. Lorſque le nœud aſcendant de la Lune eſt dans le point

équinoxial du Belier, le ſinus de l'inclinaiſon de la Lune à l'équateur, & par conſéquent ſa force pour l'incliner ſur l'écliptique, a plus d'intenſité, que quand ce nœud eſt à la Balance; d'où il ſembleroit ſuivre que l'angle de l'équateur & de l'écliptique doit alors être moindre de dix huit minutes que dans le ſecond cas; cependant c'eſt le contraire qui arrive, & ce n'eſt pas la premiere fois que nous avons remarqué qu'une force n'a pas ſon plus grand effet au moment précis où elle eſt dans ſon *Maximum*.

Pour comprendre en particulier cet effet, il faut ſe reſſouvenir de ce qui a été prouvé de la Lune, que ſon angle d'inclinaiſon diminue quand elle s'éloigne de ſon nœud, qu'il augmente quand elle s'en approche. Il en eſt de même de l'angle de l'obliquité de l'équateur avec l'orbite lunaire; il diminue quand la Lune s'éloigne de l'équateur, il augmente quand elle s'en approche; la Lune dans ce dernier cas le faiſant à tous momens avancer vers elle, lui fait par cela même couper ſon orbite, & par conſéquent l'écliptique, ſous un plus grand angle.

Quand le nœud aſcendant de la Lune

eſt dans l'équateur, la plus grande déclinaiſon, & dès-lors le plus grand ſinus, ou la plus grande force, eſt à égale diſtance du Belier & de la Balance; & par conſéquent l'obliquité de l'écliptique eſt autant augmentée, lorſque la Lune s'approche du ſecond nœud de l'équateur, qu'elle avoit été diminuée lorſqu'elle s'éloignoit du premier; il n'en eſt pas de même dans les autres poſitions.

Quand le nœud aſcendant de la Lune eſt vers le ſolſtice d'été, la plus grande déclinaiſon de cet Aſtre, conſéquemment ſa plus grande force, ou ſes plus grands ſinus, ſont du côté où elle retourne vers l'équateur & vers le ſigne de la Balance; & dès-lors l'angle d'inclinaiſon eſt plus augmenté que diminué, & cela continue d'arriver tant que le nœud eſt dans les ſignes ſeptentrionaux.

Quand au-contraire le nœud aſcendant de la Lune eſt au Capricorne, la Lune eſt dans ſa plus petite déclinaiſon lorſqu'elle monte vers l'équateur, elle eſt la plus grande lorſqu'elle en deſcend; & par conſéquent tant que cette ſituation dure, l'angle de l'équateur eſt plus diminué qu'augmenté dans toutes les révolutions.

D'où il ſuit que quand ce nœud arrive au Belier par ſa rétrogradation des points ſeptentrionaux, l'obliquité de l'équateur eſt la ſomme de toutes les augmentations qui ſe ſont faites dans le paſſage du nœud du ſolſtice d'été au point équinoxial du Belier, & quand il arrive à la Balance, elle eſt la ſomme de toutes les diminutions faites dans le paſſage du nœud de la Lune du Capricorne à la Balance. Elle eſt donc la plus grande poſſible dans le premier cas, la moindre de toutes dans le ſecond, & moyenne, lorſque le nœud arrive au colure des ſolſtices. C'eſt ainſi que dans le paſſage du nœud de la Lune des quadratures aux ſyſigies, l'inclinaiſon de ſon orbite augmente continuellement pour être la plus grande aux ſyſigies, & diminue dans le paſſage du nœud des ſyſigies aux quadratures où elle eſt la moindre poſſible.



CHAPITRE X.

Du Flux & du Reflux de la Mer.

CXXVI. Les eaux de la Mer ſont facilement mobiles, & cedent aiſément aux plus foibles impreſſions. L'Océan eſt ouvert de toutes parts, & les grandes Mers communiquent entr'elles. Ces circonſtances & l'action de la Lune ſur la Terre ſont la cauſe des Marées.

Si la Lune agiſſoit ſur toutes les parties de la Terre & ſur toutes les eaux avec des forces égales & parallèles, ces parties conſerveroient, les unes par rapport aux autres, la même ſituation, & le tout la même figure qu'auparavant. La Terre & les eaux attirées également, & par des lignes parallèles, ſi elles cédoient à cette action, ſe porteroient également vers la Lune, & s'y portant par des lignes parallèles, rien ne dérangeroit leur ancienne poſition ; la Terre & les eaux conſerveroient leur figure totale, comme une goute d'eau qui tombe vers la Terre, conſerve en tombant ſa figure ſphérique.

Mais ſi la Lune agit ſur les différentes parties de la Terre avec des actions inégales, ſi ces actions ne ſont pas dirigées ſelon des lignes parallèles, la figure de la Mer & la ſituation des eaux, les unes par rapport aux autres, doivent être altérées; & c'eſt ce qui arrive en effet.

CXXVII. Il eſt d'abord évident que la Lune attire les eaux de la Mer plus ou moins directement, ſelon leurs ſituations; plus ou moins fortement, ſelon leurs diſtances.

Attirant obliquement les eaux qui ſont en quadrature avec elle, elle augmente leur peſanteur vers la Terre, & diminue celle des eaux qui lui répondent directement; il faut donc, pour qu'il y ait équilibre dans toutes les parties de la Mer, que les eaux s'élevent ſous la Lune, afin que l'excès de la peſanteur des eaux collatérales & en quadrature, ſoit compoſé par la plus grande hauteur des eaux ſous la Lune.

Les eaux s'éleveront par la même raiſon dans le point correſpondant de l'hémiſphère oppoſé. Moins attirées par la Lune que le centre de la Terre à cauſe de leur plus grande diſtance, elles ſe porteront moins vers cet Aſtre que le centre de la

Terre ; celui-ci tendra donc à tout moment à s'écarter de ces eaux, qui seront dès-lors gonflées ou à une plus grande distance de ce centre, & qui seront encore soutenues à cette hauteur par l'augmentation de pesanteur des colonnes placées en quadrature qui communiquent avec elles. *

Pour concevoir distinctement cette élévation des eaux du côté opposé à la Lune, indépendamment même de l'augmentation du poids des colonnes latérales, il faut faire attention que si la Terre & les eaux tomboient librement vers la Lune, le centre de la Terre plus attiré que les eaux qui sont en opposition avec la Lune, se porteroit vers cet Astre avec une plus grande vitesse, laisseroit assez loin derriere lui ses parties moins attirées & plus éloignées de la Lune, tandis que

* Si une colonne d'air, celle, par exemple, qui est entre la Lune & la Terre, étoit plus comprimée qu'une autre colonne semblable, rien n'empêcheroit ses parties de s'échapper de côté jusqu'au rétablissement de l'équilibre. C'est la loi de tous les fluides, & nous voyons que, hors certains cas subits où l'air ne sauroit obéir assez promptement, ses variations se répandent par-tout avec une très-grande vitesse ; donc ce n'est pas par la compression de l'air contre les eaux de la Mer que la Lune peut opérer les Marées, comme Descartes l'avoit pensé.

les parties collatérales placées en quadrature avanceroient avec la même viteſſe que la Terre ; ce qui donneroit aux eaux, dans l'hémiſphère oppoſé à celui qui eſt tourné vers la Lune, la forme d'un *ſphéroïde oblong*, dont le grand axe paſſeroit par les centres de la Terre & de la Lune.

Or la Terre tombe effectivement ſur la Lune ; toutes ſes parties (*n.* 104.) ayant été projettées ſelon des lignes parallèles, tournent auſſi bien que la Lune autour du centre de gravité, commun à ces deux Planètes dans l'eſpace d'un mois. Toutes ces parties, en vertu de leur gravité vers la Lune, tendent donc à deſcendre au-deſſous de la tangente de l'orbe menſtruel qu'elles décrivent, & deſcendent en effet au-deſſous de cette tangente autant que s'il leur étoit libre de tomber abſolument ſur la Lune. C'eſt ainſi qu'une bombe deſcend à tous moments au-deſſous de la ligne de ſa projection autant qu'elle tomberoit ſelon la perpendiculaire dans le même-temps, ſi elle étoit abandonnée à l'action ſeule de ſa gravité.

Cette chûte, ou deſcente au - deſſous de la tangente, eſt néceſſairement proportionnée à la gravité vers la Lune qui la produit ; donc la gravité vers la Lune

étant plus grande dans le centre de la Terre que dans les eaux de l'hémiſphère oppoſé à celui qui eſt tourné vers la Lune, ce centre deſcendra plus au-deſſous de ſa tangente, dans un temps donné, que ces eaux au-deſſous de la leur, & par conſéquent la diſtance entre ces eaux & ce centre ſe trouvant augmentée, il y aura une véritable élévation des eaux dans l'hémiſphère oppoſé à la Lune.

Au-contraire dans l'hémiſphère tourné vers la Lune, les eaux peſant plus ſur cet Aſtre que le centre de la Terre, tombent plus que lui au-deſſous de leurs tangentes, & s'élevent dès-lors à une plus grande diſtance.

D'où il ſuit que par l'action de la Lune, *il ſe formera ſur la Terre deux promontoires d'eau, l'un du côté de la Lune, l'autre du côté oppoſé; ce qui donnera à la Mer la figure d'un ſphéroïde oblong, dont le grand axe paſſera par les centres de la Lune & de la Terre.*

D'où il ſuit encore, que *la Marée ſera haute ſous la Lune, & baſſe à 90° de diſtance de cette Planète.*

CXXVIII. Le grand axe du ſphéroïde formé par la Lune ſuivroit exactement le mouvement de cette Planète, & il n'y

auroit dans chaque lieu que deux élévations des eaux par mois, si la Terre étoit immobile ; mais elle tourne sur elle-même en 24 heures, & présente successivement à la Lune tous ses méridiens; donc ces différents méridiens sont tour-à-tour, & dans un intervalle de six heures, tantôt sous la Lune, tantôt à une distance de 90° de cet Astre ; donc dans l'espace d'un jour lunaire, qui surpasse le jour naturel d'environ 50′, les eaux de la Mer s'éleveront deux fois, s'abaisseront deux fois dans tous les lieux de la Terre. *C'est le Flux & le Reflux.*

CXXIX. Il faut en excepter les lieux voisins des pôles; la Lune ne passant jamais les tropiques qui sont à 60° ½ des pôles, & l'augmentation de pesanteur commençant à 35° 16′ de la quadrature, les eaux voisines des pôles sont toujours dans un état de compression dont les différences sont légeres, & les *Marées cessent d'être sensibles dès qu'on a passé le 65e degré de latitude.* *

* Ce n'est là ni précisément l'effet ni toute la cause; le phénomène des Marées dépend principalement de la différence des actions de la Lune en longitude. Nous verrons *n.* 142, que quand la déclinaison de la Lune est septentrionale, les Marées qui suivent sont plus petites

CXXX. La Terre tournant ſur ſon centre, & emportant avec elle à l'orient de la Lune la partie d'eau la plus élevée, celle-ci continuera de s'élever encore par l'action de la Lune; & quoique cette action, moins directe, diminue toujours dans ce cas: cependant elle ſubſiſte & contribue à l'élévation juſqu'au 54° de la ſyſigie; d'où il ſuit que *la plus grande élévation de l'eau ne doit pas arriver au moment même du paſſage de la Lune par le méridien, mais à peu-près dans les octans ou trois heures après ce paſſage.* C'eſt ainſi que la plus grande chaleur des jours d'été n'arrive pas à midi préciſément, mais environ ſur les trois heures, ou dans les octans du Soleil.

Une ſeconde cauſe ſe joint à cette premiere pour produire cet effet; les eaux placées en quadrature à l'occident de la

que celles qui précedent dans toutes les latitudes boréales, & que cette inégalité augmente avec la latitude; d'où il ſuit qu'à une certaine diſtance le ſecond Flux doit être abſolument inſenſible & le premier très-petit. Si la déclinaiſon de la Lune eſt méridionale, elle ne ſe leve plus par rapport à nos régions pôlaires, & ſon cercle diurne eſt tout entier au-deſſous de l'horiſon de ces lieux; il ne peut donc y avoir de Marée par rapport à eux, que quand la Lune eſt ſous notre horiſon; ce qui ne donne qu'un Flux très-petit en 24 heures dans nos régions boréales.

Lune, & portées vers la conjonction avec cet Astre par le mouvement diurne de la Terre, seront continuellement accélérées dans ce quart de leur jour, se mouvront après la sysigie avec cette somme d'accélérations, & rencontrant alors des eaux continuellement plus retardées que la Terre, il se fera comme deux courans contraires qui placeront la plus grande élévation dans les octans après la sysigie.

Par la même raison, le lieu des plus basses eaux ne sera pas celui qui est à 90° de distance de la Lune; car la Lune continuant d'augmenter la pesanteur des eaux pendant 35° 16′ après la quadrature, la hauteur de l'eau doit diminuer continuellement jusqu'à cette distance de la quadrature, & même au-delà, en vertu de l'accélération acquise pendant cet intervale; ce qui portera *le plus grand abaissement des eaux à 45° environ de la quadrature & trois heures après.*

CXXXI. Le Soleil diminuant de même la pesanteur des eaux qui lui répondent directement, & augmentant le poids de celles qui sont en quadrature avec lui, doit aussi faire gonfler les eaux de la Mer, & avoir part aux Marées: car, quoique l'action totale du Soleil sur la

la Mer, soit plus grande que celle de la Lune ; cependant comme l'élévation des eaux ne vient pas de la quantité absolue qui les attire, mais de la différence & du non-parallélisme de ses actions, il n'est pas étonnant que le Soleil contribue moins que la Lune au mouvement des eaux.

D'une part, l'angle formé par les lignes tirées du Soleil aux eaux qui sont en sysigie & en quadrature avec lui, est incomparablement moindre que celui qui est formé par les lignes tirées du centre de la Lune aux mêmes points ; & par conséquent les actions du Soleil sur ces eaux s'éloignent moins du parallélisme que les actions de la Lune sur elle.

D'autre part, le diamètre de la Terre étant insensible par rapport à la grande distance du Soleil, les eaux qui sont sous cet Astre ne doivent être que fort peu plus attirées vers lui que le centre de la Terre, & les eaux de l'hémisphère opposé ne le doivent être gueres moins que ce centre ; au lieu que le diamètre de la Terre étant fort comparable à la distance de la Lune, ce Satellite doit attirer les eaux qui lui répondent beaucoup plus que le centre de la Terre, & ce centre

beaucoup plus que les eaux de l'hémiſphère oppoſé plus éloignées ; d'où il ſuit que *le Soleil doit avoir part aux Marées & y contribuer moins que la Lune.*

CXXXII. Donc les Marées doivent être plus grandes quand les forces du Soleil & de la Lune concourent, moindres quand ces forces ſe contrarient : or dans les conjonctions & les oppoſitions de la Lune, ſon action concourt avec celle du Soleil ; elle éleve où le Soleil abaiſſe, elle abaiſſe où le Soleil éleve, quand elle eſt en quadrature ; donc en général *les plus grandes Marées doivent arriver aux nouvelles & pleines Lunes, & les moindres dans les quartiers de la Lune.*

CXXXIII. Cependant *la plus haute Marée n'arrive pas & ne doit pas arriver préciſément le jour de la nouvelle ou pleine Lune, mais ſeulement deux ou trois jours après.* En effet, ſi les actions du Soleil & de la Lune venoient à ceſſer après le jour de la nouvelle ou de la pleine Lune, les eaux accumulées ſous ces Aſtres retomberoient par leur propre poids, ſe répandroient ſur les parties les plus baſſes par un mouvement accéléré, s'accumuleroient là de toutes parts, & s'y éleveroient à une trop grande hauteur, elles

retomberoient ensuite par un mouvement pareillement accéléré vers le lieu où précédemment elles étoient accumulées sous les Astres, y formeroient un nouveau promontoire, & l'effet du Soleil & de la Lune subsisteroit ainsi quelque temps, quoique leurs actions fussent suspendues; c'est ainsi que les vagues de la Mer persistent quelque-temps après que l'orage ou la tempête ont cessé.

Or si les eaux de la Mer conservent quelque-temps les agitations produites par le Soleil & la Lune le jour de la nouvelle ou pleine Lune, il est nécessaire que les actions de ces Astres recommençant & ajoutant, quoique pardes degrés un peu moindres à cette disposition des eaux, les portent les jours suivans à une élévation plus grande qu'au jour de la nouvelle ou pleine Lune.

La raison générale est, que quoiqu'ne force diminue; cependant si elle agit toujours, & si à cause de son inertie l'objet sur lequel elle agit ne perd pas tout à coup la vitesse qu'il en a reçue, son effet augmente toujours & n'est pas dans son *maximum* lorsque la force est dans le sien; c'est pour cela que le plus grand froid n'arrive pas le jour même du solstice

d'hiver, ni le plus grand chaud au solstice d'été, mais six semaines environ après.

CXXXIV. Il suit de-là que *des nouvelles & pleines Lunes aux quadratures, les Marées du matin doivent être plus grandes que celles du soir ; & que des quadratures aux sysigies, les Marées du soir sont plus grandes que celles du matin.* Car puisque les Marées doivent décroître depuis les nouvelles & pleines Lunes jusqu'aux quartiers, la premiere Marée est toujours plus grande que la seconde ; & puisqu'elles augmentent depuis les quartiers jusqu'aux nouvelles & pleines Lunes, la seconde Marée est toujours plus grande que la premiere.

CXXXV. Dans le passage de la Lune des sysigies aux quadratures & dans tout cet intervalle, la troisiéme heure solaire à laquelle devroit arriver la plus grande élévation de l'eau par la force de cet Astre, précède la troisiéme heure lunaire à laquelle devroit arriver la plus grande hauteur de l'eau par la force de ce Satellite ; donc dans la combinaison de ces deux forces, la plus grande élévation doit arriver dans un temps intermédiaire & précéder la troisiéme heure lunaire ; mais cependant en approcher de

plus près que de la troisiéme heure du Soleil, à cause que la Lune a plus de part aux Marées que cet Astre.

Au-contraire, dans le passage de la Lune des quadratures aux sysigies, la troisiéme heure après le passage de la Lune par le méridien arrive plutôt que la troisiéme heure après le passage du Soleil par le même méridien; donc la plus grande élévation qui devroit arriver à la troisiéme heure lunaire par l'action de la Lune, n'arrivera qu'après en vertu de ce que le Soleil y ajoute pendant quelque temps.

CXXXVI. *La disproportion des quarrés des petites quantités est plus grande que celle des quarrés des grandes, quoiqu'il y ait même différence entre leurs racines.* Ainsi la différence de 3 à 2 est la même que celle de 2 à 1, & 9 quarré de 3 n'est qu'un peu plus du double de 4 quarré de 2, quoique 4 quarré de 2 soit quadruple de 1 quarré de 1; ainsi pareillement 16 quarré de 4 n'est pas tout-à-fait double de 9 quarré de 3, quoique 9 soit plus du double de 4 quarré de 2.

Or quand la Lune s'approche de la Terre dans son périgée, la différence des distances des différentes parties de la Terre à la Lune demeure la même & est

toujours meſurée par la diſtance même de ces parties entr'elles, quoiqu'alors leurs diſtances abſolues à la Lune deviennent moindres ; donc la diſproportion des quarrés de ces diſtances eſt plus grande que quand la Lune eſt apogée.

Or dans tous les cas les inégalités des actions de la Lune ſur les différentes parties de la Terre ſont dûes à la diſproportion des quarrés de ſes diſtances actuelles à ces différentes parties ; donc l'inégalité des actions de la Lune qui troublent la Mer, eſt plus grande dans ſon périgée que dans ſon apogée, & par conſéquent *le Flux & le Reflux doivent être ſenſiblement plus grands quand la Lune eſt périgée que quand elle eſt apogée.*

CXXXVII. Quoiqu'en général les plus grandes Marées doivent arriver aux nouvelles & pleines Lunes, toutes choſes d'ailleurs égales ; cependant ſi le périgée de la Lune eſt dans la conjonction, la Marée qui arrivera quinze jours après à l'oppoſition ſera moindre que celle de la nouvelle Lune, parce que la Lune ſera alors dans ſa plus grande diſtance ; par la même raiſon, ſi l'apogée eſt dans la conjonction, le Flux & le Reflux ſera plus grand à la pleine Lune qu'il n'avoit été

à la syſigie précédente ; d'où il ſuit que les plus grandes eaux n'arriveront pas alors dans les deux ſyſigies conſécutives.

CXXXVIII. Si le Soleil & la Lune étoient au pôle, le grand axe du ſphéroïde coïncideroit avec l'axe de la Terre, toute l'eau de l'équateur ſeroit partout ce cercle à la même hauteur, & nul lieu de la Terre, en décrivant ſon parallèle par le mouvement diurne, ne rencontreroit dans ſa courſe aucune partie de l'eau plus élevée qu'une autre ; enſorte qu'il n'y auroit Flux ni Reflux nulle part. Si les deux luminaires venoient à s'éloigner du pôle, les agitations de la Mer recommenceroient ; elles doivent donc être les plus grandes de toutes, lorſque le Soleil & la Lune ſont dans le plan de l'équateur. En effet, les eaux ſe mouvant alors dans le plus grand cercle, doivent être dans la plus grande agitation ; ce ſera donc *aux nouvelles & pleines Lunes des équinoxes*, toutes choſes d'ailleurs égales, *qu'arriveront les plus grandes Marées*. La force centrifuge des eaux élevées eſt en effet alors plus grande & plus conſpirante avec l'attraction de la Lune, & le mouvement du ſphéroïde moins combattu par la direction des eaux.

CXXXIX. Par le même principe, *les Marées produites, quand le Soleil eſt à l'un des tropiques & la Lune dans ſes quadratures, ſont plus grandes que celles qui arrivent quand le Soleil eſt à l'équateur & la Lune dans ſes quadratures :* car, dans le premier cas, la Lune eſt à l'équateur où ſon action eſt la plus efficace que partout ailleurs; dans le ſecond cas, elle eſt à l'un des tropiques où ſous la même force elle a moins d'effet ſur les eaux; donc le Flux & Reflux, dependant plus de la Lune que du Soleil, il doit être plus conſidérable dans le premier cas que dans le ſecond.

CXL. Cependant, parce que le Soleil eſt plus près de la Terre en hiver qu'en été, il ſuit de-là que *les plus grandes Marées arrivent après l'équinoxe d'automne & avant celui du printemps.*

CXLI. *Dans les nouvelles & pleines Lunes des équinoxes, les Marées du ſoir ſont toujours égales à celles du matin;* c'eſt qu'alors le ſphéroïde des eaux ayant ſon grand axe dans le plan de l'équateur, nous ſommes le ſoir & le matin à égale diſtance de la plus grande hauteur des eaux.

CXLII. Il n'en eſt pas de même dans les nouvelles & pleines Lunes d'été; *les*

Marées du ſoir ſont plus grandes que celles du matin : Dans les nouvelles & pleines Lunes d'hiver *les Marées du ſoir ou du jour ſont au-contraire plus petites que celles de la nuit ou du matin.* C'eſt que dans le premier cas nous ſommes plus près de la plus grande élévation des eaux pendant le jour que la nuit ; au-contraire dans le ſecond.

En été la Lune étant nouvelle, décrit un parallèle placé entre nous & l'équateur ; pendant le jour, ou quand la Lune eſt au deſſus de l'horiſon, le grand axe du ſphéroïde paſſe par les points de ce parallèle élevés au-deſſus de l'horiſon, & nous en ſommes près. Au-contraire pendant la nuit le grand axe du ſphéroïde en-deçà de l'équateur eſt au-deſſous de l'horiſon, & ſa partie, qui eſt ſur l'horiſon, ſe trouvant au-delà de l'équateur, nous en ſommes très-éloignés, & par conſéquent les Marées du jour ſont plus grandes que celles de la nuit.

En hiver la Lune étant nouvelle, décrit un cercle parallèle en-delà de l'équateur par rapport à nous, & pendant le jour la partie du ſphéroïde qui eſt ſur notre horiſon eſt auſſi au-delà de l'équateur & fort éloignée ; Au-contraire pendant la

nuit, la Lune étant ſous l'horiſon, la partie du ſphéroïde qui eſt ſur notre horiſon, répondant à un point diamètralement opposé au lieu de la Lune, ſe trouve entre l'équateur & nous, & nous en ſommes plus près; nous participons par conſéquent davantage à l'élévation des eaux, & *les Marées du jour ſont plus petites que celles du matin dans nos latitudes* *

Cette différence eſt la plus grande de toutes, lorſque le Soleil & la Lune ſe trouvent l'un & l'autre au *ſolſtice* ou dans les tropiques; parce que les deux élévations parcourent en ce cas les deux cercles parallèles les plus éloignés de l'équateur qu'ils puiſſent parcourir, & dès-lors les plus près ou les plus eloignés de nous.

Cependant parce que les fluides retiennent toujours quelque temps le mouvement qui leur eſt imprimé, & que par-là les Marées précédentes affectent toujours celles qui les ſuivent, cette différence n'eſt jamais ſi grande dans ſon

* En été la Lune pleine eſt en-delà de l'équateur, en-deçà dans les pleines Lunes d'hiver; c'eſt donc le jour dans les pleines Lunes d'été, & la nuit dans les pleines Lunes d'hiver que le grand axe du ſphéroïde paſſe le plus près de nous; donc dans les pleines Lunes d'été ce ſont les Marées du jour, & dans les pleines d'hiver ce ſont les Marées de la nuit qui ſont les plus grandes.

effet qu'elle devroit l'être par la différence seule de la cause.

CXLIII. En résumant toutes les circonstances qui concourent à l'élévation des eaux, on conclura que *les plus grandes de toutes les Marées doivent arriver, lorsqu'aux environs des équinoxes la Lune est en même-temps périgée & périhélie & dans les sysigies.*

CXLIV. Le rayon de la Terre est plus petit par rapport à la distance du centre de la Terre à l'astre qui attire, que par rapport à la distance de ce même Astre à la surface de la Terre du côté de cet Astre ; donc les forces des deux luminaires seront toujours moindres sur les eaux qui sont dans l'hémisphère opposé que sur celles qui seront de leur côté, & *l'axe du sphéroïde sera toujours plus élevé du côté de la Lune & du Soleil que de l'autre côté ;* ce qui a aussi été observé.

CXLV. Pour que les Marées puissent avoir leur mouvement libre, l'Océan, dans lequel elles sont produites, doit être étendu d'orient en occident de 90°, ou d'un quart de cercle au moins. Ce qui éleve les eaux, c'est leur communication entr'elles, l'augmentation de leurs poids dans les quadratures, & sa diminution

dans les ſyſigies ; il faut donc que tout cela ait lieu, & que la Mer s'étende à 90° pour que les eaux s'élevent.

C'eſt pour cette raiſon que dans la Mer Pacifique les Marées ſont plus grandes que dans l'Océan Atlantique, & que dans la zône torride, entre l'Afrique & l'Amérique, où l'Océan eſt plus reſſerré, elles ſont moins conſidérables que dans les zônes tempérées. Dans l'Océan Atlantique, l'eau ne peut s'élever ſur un rivage qu'elle ne baiſſe ſur l'autre ; dans les diſtances intermédiaires, participant de ces deux effets, elle doit perſiſter à peu-près dans une hauteur moyenne à celle de ces rivages, & les côtes qui ſont à ces diſtances intermédiaires ne peuvent éprouver qu'un Flux & Reflux très-petit.

La Méditerranée s'étend de 60° environ en longitude ; l'augmentation du poids des eaux vers les quadratures commence à 54° 44′ de la ſyſigie ; il doit donc y avoir un Flux très-léger dans cette Mer, qui ſera fort troublé par les vents qui y regnent, & qui ne ſera preſque ſenſible que dans la Mer Adriatique plus large.

Si la Méditerranée communiquoit

avec l'Océan par un détroit plus large que celui de Gibraltar, ou que l'ouverture de ce détroit fût tournée vers l'orient de la Méditerranée, les eaux y entreroient avec abondance, & les Marées y seroient plus grandes. L'eau y coule cependant, & les Marées sont très compliquées aux environs de ce détroit. Il s'y forme des lisiéres qui ont chacune des mouvements différents ; celles qui sont sur les côtes de chaque côté paroissent venir des Marées même de la Méditerranée, & les deux autres qui les touchent des Marées de l'Océan.

Les rivages, les golfes, les baies, les détroits, les bancs de sable doivent faire varier beaucoup les Marées. Dans l'Océan Atlantique, & sur les côtes occidentales d'Europe, le Flux & le Reflux arrive assez comme le requiert la situation de la Lune, & l'eau parvient à sa plus grande élévation environ trois heures après son passage par le Méridien sur les côtes d'Espagne, de Portugal, & sur celles de l'occident d'Irlande; de-là elle s'écoule par les détroits adjacents où elle trouve moins de résistance, se répand par deux courans au midi de l'Angleterre & au nord de l'Ecosse, emploie beaucoup de temps à

parcourir ces espaces, s'éleve plutôt aux lieux où elle arrive plutôt, & commence à baisser dans les premiers, tandis que les courans avancent encore vers d'autres lieux plus éloignés ; quand ces courans reviennent, ils ne peuvent produire de Marées, parce que l'eau s'écoule avec trop de rapidité, jusqu'à ce que par un Flux poussé depuis le grand Océan, le retour du courant soit arrêté, & que l'eau commence à s'élever de nouveau ; ce qui met dans les différents lieux de grandes différences pour le temps de la Marée, comme il y en a déjà pour la hauteur par la situation des rivages, selon qu'ils sont plus ou moins escarpés, qu'ils se présentent plus ou moins directement aux courans, ou qu'ils ont plus ou moins de sinuosités pour retenir l'eau & l'empêcher de s'écouler.

Il en est de même sur les côtes de France ; aux embouchures de la Garonne & de la Loire qui sont dirigées vers un vaste Océan, aux temps des nouvelles & pleines Lunes, le Flux arrive à trois heures environ après midi, ce qui est le temps où il doit arriver naturellement & ce qui prouve que la Marée n'a pas été retardée par les côtes, mais y est pro-

duite par les eaux qui viennent directement de l'occident. Il n'en est pas de même à Saint-Malo, au Havre, à Dunkerque & à Ostende, la situation de ces lieux n'étant pas dirigée vers une aussi vaste Mer, le Flux n'y arrive que par les courans qui se forment sur les côtes, & par conséquent successivement, sçavoir à 6 heures à Saint-Malo, à 9 heures au Havre, à minuit à Dunkerque & à Ostende. A Dunkerque la haute Mer s'observe souvent à midi aux temps des syzigies; mais ce Flux n'est point dû à l'action présente des deux luminaires, mais à celle qui a précédé 12 heures auparavant, comme le prouve la situation des rivages de France & de la Flandre; ce Flux arriveroit trop tôt & contre la regle autrement.

D'autres différences sont dûes à d'autres situations & à d'autres circonstances; à *Batsha*, port du Royaume de *Tonquin*, il y a deux entrées, l'une par l'Océan Chinois entre le Continent & *Manille*, l'autre par la Mer des Indes entre le Continent & *Borneo*; la Marée arrive par l'une de ces entrées à la troisiéme heure de la Lune, tandis que par l'autre entrée elle n'arrive que six heures après,

à la neuviéme heure de la Lune, à cauſe de leur différente ſituation; ſi donc les Marées ſont égales, l'une venant à fluer tandis que l'autre reflue; l'eau doit reſter tranquille ſans aucun mouvement; ce qui arrive lorſque la Lune eſt dans l'équateur, parce qu'alors les Marées du ſoir ſont égales à celles du matin; mais ſi la Lune commence à décliner du même côté de l'équateur que Batsha, le Flux & le Reflux du jour excède alors celui de la nuit & les deux Marées qui ſe ſuivent ne ſont point égales; le Flux qui arrive d'un côté ſurpaſſera donc le Reflux qui ſe fait de l'autre côté, & la Mer ſera haute pendant 12 heures, on n'aura qu'un Flux & qu'un Reflux. Ce ſera la même choſe quand la Lune ſera de l'autre côté de l'équateur, avec cette différence que dans le premier cas les eaux ſeront hautes environ vers la ſixiéme heure après le coucher de la Lune & baſſes à ſon lever, au lieu que dans le ſecond elles ſeront hautes au lever & baſſes au coucher de la Lune.

CXLVI. M. *Newton* ne s'eſt pas contenté de ces obſervations générales; il a recherché quelle doit être la quantité des Marées, & quelle part le Soleil & la Lune doivent avoir ſéparément dans ces effets.

Nous

Nous avons vu (*n.* 89.) que l'augmentation de la pesanteur de la Lune aux quadratures est à cette pesanteur, comme 1 à 178 : or la pesanteur de la Lune est à la pesanteur des graves à la surface de la Terre, comme 1 à $60 \times 60 = 3600$; donc l'augmentation du poids de la Lune par l'action du Soleil est à la pesanteur des graves sur la surface de la Terre, comme 1 à 178×3600, c'est-à-dire, comme 1 à 640800.

Or l'augmentation de la pesanteur de la Lune par le Soleil est à l'augmentation du poids des eaux de la Mer par la force de cet Astre dans la raison de 60 à 1, ou comme la distance de la Lune au rayon de la Terre (*n.* 89); d'où il suit que l'augmentation du poids des eaux placées en quadrature avec le Soleil est à leur pesanteur naturelle sur la Terre dans la raison de 1 à 640800×60, ou comme 1 à 38448000.

La diminution de cette pesanteur sous le Soleil, & dans le point opposé, est double de cette augmentation (*n.* 90); donc elle est la pesanteur naturelle, comme 2 à 38448000, & la somme de ces deux forces, d'augmentation & de diminution, est à la même pesanteur,

comme à 3 3844000, ou comme 1 à 12816000.

Donc la force totale du Soleil pour troubler les eaux de la mer, & par conséquent leur élévation en vertu de cette force, est à la pesanteur à la surface de la Terre, comme 1 à 12816000, ou comme 1 à 12868200 selon le calcul de M. *Newton* plus exact que le précédent, en ce que nous n'avons fait la distance de la Lune à la Terre que de 60 demi-diamètres de la Terre, au lieu de $60\frac{1}{2}$.

La force centrifuge sous l'équateur (*n.* 14.) est de 289 fois moindre que la pesanteur; donc l'action du Soleil pour élever les eaux est à la force centrifuge sous l'équateur, comme 1 à $\frac{12868200}{289} = 44527$, & par conséquent la force centrifuge à l'action du Soleil comme 1 à $\frac{1}{44527}$.

Or cette force centrifuge éleve les eaux à l'équateur de 89054 pieds de Paris au-dessus du pôle; donc en disant, $1. \frac{1}{44527} :: 89054. x$, on aura x, ou l'élévation des eaux de la Mer par la force du Soleil, égale à 2 pieds.

Puisque le Soleil n'éleve qu'à deux pieds, le reste de l'élévation des Marées dépend de la Lune. Or en comparant

diverses observations, & y faisant les corrections nécessaires, *Newton* trouve que dans les moyennes distances du Soleil & de la Lune à la Terre, le total de l'élévation de l'eau sur les bords d'un Océan vaste & profond, est d'environ $10\frac{1}{2}$ pieds; donc il y a $8\frac{1}{2}$ pieds qui viennent de la Lune, & par conséquent la force de ce Satellite est un peu plus que quadruple de celle du Soleil, & dans la raison de 4, 4815 à 1 à la force de cet Astre.

CXLVII. Le diamètre de la Lune est à celui de la Terre, comme 3 à $11\frac{1}{7}$, & par conséquent leurs volumes comme 27 à 1384, ou comme 1 à $51\frac{1}{4}$; mais ce rapport n'est pas celui de leurs masses. La force de la Lune, pour troubler la Mer étant quadruple de celle du Soleil, en en déduisant ce qui vient des distances, Newton en conclut que la densité de la Lune est à celle du Soleil comme 4891 à 1000; & la densité du Soleil étant à celle de la Terre environ comme 1000 à 4000 (*n.* 76.), il s'ensuit que la densité de la Lune est à celle de la Terre, comme 4891 à 4000, ou comme 11 à 9 à peu-près; ce qui donne la masse de la Lune à celle de la Terre, comme 1 à 40

à très-peu-près, & le centre commun de gravité de ces deux Planètes presque 40 fois plus près de la Terre que de la Lune: tout cela conforme à ce qui a été observé (*n.* 77.), où nous avons vu que les Planètes les plus petites se trouvent toujours les plus denses.

La force de la Terre pour changer la figure de la Lune est à la force de la Lune pour changer la figure de la Terre, en raison composée de la masse de la Terre à la Lune, ou de 40 à 1, & du diamètre de la Lune au diamètre de la Terre (*n.* 89.), ou de 3 à 11, c'est-à-dire en raison de 11 à 1 à très peu-près; donc la Lune élevant les eaux de la Mer à 8 pieds $\frac{1}{2}$, la Terre doit élever les fluides de la Lune de 93 pieds de chaque côté, & le grand diamètre de la Lune doit surpasser le petit de 186 pieds environ.

CXLVIII. Puisque la force perturbatrice du Soleil est à la pesanteur des eaux, comme 1 à 12868200, la force perturbatrice de la Lune sur ces mêmes eaux est à leur pesanteur, dans la raison d'un peu plus de 4 à 12868200, & la somme des forces de ces deux Astres à la même pesanteur dans la raison d'à peu-près 5 à 12868200, exactement dans la raison de

1 à 2032890. Or cette force, qui à cauſe de la grande mobilité des eaux, ſuffit pour les élever à environ 10 pieds, eſt trop petite pour ſe faire ſentir ſur les Pendules, & dans les expériences de ſtatique; le frottement qui ſe fait ſur la balance la plus exacte, l'empêche de Trébucher dans le cas où elle le devroit faire ſelon les loix de la ſtatique. Si l'on met, par exemple, un poids de quatre mille grains en équilibre, l'on n'appercevra aucun effet en ajoutant un grain de part ou d'autre; donc la force perturbatrice du Soleil & de la Lune étant à la peſanteur dans une raiſon beaucoup moindre que celle de 1 à 4000, elle ne peut altérer, du moins ſenſiblement, le mouvement des Pendules. *

* L'air étant au moins 600 fois moins peſant que l'eau doit pour la même raiſon peſer 600 fois moins ſur la Lune; & l'eau ne s'élevant qu'à 10 pieds par la force conjointe des deux Aſtres, l'air ne peut s'élever par cette force qu'à $\frac{1}{5}$ de pouce à même diſtance. La hauteur de l'atmoſphère n'eſt qu'environ $\frac{1}{15}$ du rayon de la Terre, & par conſéquent la diſtance de la Lune au centre de la Terre étant de 60 à peu-près de ces rayons., la diſtance de la ſurface des eaux eſt de 59, & celle du haut de l'atmoſphère de 58 $\frac{14}{15}$ de ces rayons, dont les quarrés ſont très-peu différents. D'où il ſuit que ſous la Lune & le Soleil l'air ne pourra gueres s'élever plus que de $\frac{1}{5}$ de pouce; ce qui ne peut produire de variation ſenſible dans latmoſphère.

CXLIX. Il y a donc une force répandue dans toute la matiere, qui regle le mouvement des corps céleſtes, quoique ſéparés par de grands intervalles, & qui exerce ſon empire ſur la Terre. On ne peut ſans doute aſſez admirer la ſimplicité & la fécondité d'une loi, qui deſcend juſques dans les plus petits détails, & qui rend raiſon des effets naturels avec beaucoup plus de préciſion qu'on ne peut en mettre dans les ouvrages de l'Art. Un rapport ſi juſte entre la cauſe & la qualité des effets, eſt ſans difficulté une démonſtration de l'exiſtence de la cauſe, & il n'y a rien de prouvé en Phyſique ſi cette cauſe ne l'eſt.

Cependant s'il exiſte une telle force, comment les dernieres Etoiles ne tombent-elles pas ſur les avant-derniéres, & toutes enſemble ſur le Soleil ? Qu'y a-t-il qui puiſſe les retenir dans leurs eſpaces, & empêcher l'effet de leur attraction ? Voilà ſans doute une grande difficulté.

Mais pourquoi veut-on que les Etoiles peſent les unes ſur les autres & ſur le Soleil ? Cela n'eſt indiqué par aucun phénomène, ni inſinué par aucune analogie. Tout ce qui tourne à l'entour du

Soleil, gravite vers lui, & la même analogie qui nous force à croire que les pierres pesent sur la Terre, dans les Terres Australes, nous convainc que tout ce qui est compris dans la sphère qu'occupent les Astres qui tournent autour du Soleil, pese aussi sur cet Astre ; mais les Etoiles ne sont pas renfermées dans cette sphère; la foiblesse de leur lumiere & leur diamètre apparent, qui n'est qu'un point, nous indiquent assez leur immense éloignement.

Ce que peut donc nous enseigner l'analogie, c'est que dans chaque sphère ou systême de ces Etoiles il y a une pareille force qui en est l'ame ; mais rien n'empêche que ces forces n'aient absolument leurs limites. La difficulté que l'on fait en seroit une preuve si elle étoit solide ; rien n'empêche même, que d'autres loix de gravité ne regnent dans plusieurs systêmes des Etoiles fixes ; & alors si la pesanteur y suivoit dans quelques-uns la raison directe des distances, les Planètes y décriroient des ellipses qui auroient (*n.* 24.) l'Etoile à leur centre, avec deux grandes & deux petites apsides. Les Comètes & les Planètes de ces systêmes s'attirant proportionnellement à leurs

distances, & attirant de même leur Etoile centrale, ne se causeroient aucun trouble, aucun dérangement; les temps périodiques de tous ces Astres seroient égaux; & quelqu'inégal que fût la distance des corps laissés à leur pesanteur, ils tomberoient tous en même-temps sur le centre, & touts les Pendules seroient isochrones, quelle que fût la différence de leurs arcs. De telles Etoiles pourroient être fort applaties dans cette hypothese de pesanteur, comme l'a fait voir M. *de Maupertuis*; * elles pourroient n'être que de grandes meules lumineuses, qui changeant leur situation par l'action de quelque Planète descendue à son périhélie, tantôt nous présenteroient leur tranchant, tantôt leur plan circulaire, plus ou moins directement, & paroîtroient s'éteindre tout-à-fait pour se ranimer peu-

* Dans cette hypothèse de pesanteur, si la force centrifuge devenoit à la surface à très peu-près égale à la pesanteur, chaque point pris dans le diamètre de l'équateur seroit sans gravité ou n'auroit qu'une pesanteur infiniment petite; donc les différentes parties de l'axe qui n'ont point de force centrifuge, n'ayant rien qui pût soutenir leur pesanteur, s'applatiroient contre l'équateur, & l'Astre n'ayant plus qu'une largeur infiniment petite, ne seroit plus qu'un grand plan circulaire; ce qui montre que toute sorte d'applatissemens sont possibles dans cette hypothèse de pesanteur.

à-peu dans des variétés réglées ou irrégulières, ſelon le nombre des Comètes & des Planètes qui deſcendroient aſſez près pour agir fortement ſur elles.

Si dans d'autres ſyſtêmes, la peſanteur ſuivoit la raiſon renverſée de la ſimple diſtance, dans toutes les diſtances les viteſſes des cercles ſeroient égales, les temps périodiques comme les diſtances, ou en raiſon inverſe des forces centrales, (*n.* 17.) un corps jetté à une certaine diſtance, avec une viteſſe moindre que celle qu'il faudroit là, pour décrire un cercle, ſe mouvroit dans une courbe au-deſſous de ce cercle, accéléreroit ſa viteſſe, & en ayant bientôt plus que les cercles qu'il atteindroit, il ſeroit forcé de remonter & de ſe mouvoir perpétuellement entre deux apſides (*n.* 51.), en s'approchant & s'éloignant alternativement du centre avant une demie-révolution.

Or de quel droit reſtreindrions-nous les vûes de la nature? Et pourquoi ſuppoſerions-nous que le ſpectacle qu'elle offre, n'eſt pas infiniment varié par l'emploi qu'elle a fait de toutes les loix poſſibles? L'attraction, fût-elle une force inhérente, n'eſt pas eſſentielle à la matiere,

beaucoup moins telle ou telle loi déterminée; rien ne conduit donc à penſer qu'elle n'a pas de limites, ou que les Etoiles peſent les unes ſur les autres. La marche même de Newton y réſiſte, & la maniere inconteſtable dont il établit cette attraction, eſt elle même une preuve que nous ne devons pas l'étendre ſi loin.

Cependant ſi, parce que la lumiére des Etoiles parvient juſqu'à nous, on vouloit y trouver une preuve d'analogie que l'attraction du Soleil s'étend juſqu'à elles, ce ſeroit conclurre de la poſſibilité au fait, & faire un raiſonnement *à ſimili*, là où il n'y a point de ſimilitude; la foibleſſe même de cette lumiere nous indiqueroit que tout au moins l'attraction du Soleil ſeroit inſenſible à ces diſtances. On ſait que l'orbe annuel n'a point de parallaxe; & ſi le ſyſtême de *Copernic* nous a forcés d'élargir le Ciel, pourquoi celui de *Newton* ne nous mettroit-il pas en droit d'en reculer encore davantage les limites? L'Etoile fixe la plus brillante, vûe à travers un téleſcope, qui groſſiroit à un tel point que le diamètre du Soleil paroîtroit égal au diamètre de l'orbe annuel, ne paroîtroit encore qu'un point lucide ſans grandeur ſenſible; ce qui fait

juger que ces Etoiles ſont à une diſtance qui excède 3452500000000 de nos lieues, c'eſt-à-dire, qui eſt plus de cent mille fois plus grande que la diſtance de la Terre au Soleil ; leur peſanteur ſur cet Aſtre ſeroit donc dès-lors plus de 100000 × 100000 fois moindre que la gravité de la Terre ſur le Soleil, & ne pourroit avoir d'effets ſenſibles dans un très-grand nombre de ſiécles.

Si l'attraction des fixes & du Soleil étoit proportionnelle à leurs lumieres, la peſanteur de notre ſyſtême ſolaire ſur toutes les fixes placées d'un même côté, ſeroit à notre peſanteur ſur le Soleil, qui eſt ſi petite en comparaiſon des graves ſur notre Terre, comme la lumiere d'une nuit d'hiver à la ſplendeur d'un beau jour d'été ; ce qui fait une différence immenſe, ou du jour à la nuit, comme on dit : or l'attraction du Soleil & des Etoiles eſt encore beaucoup moindre que la force de leurs lumiéres. La lumiere eſt lancée de la ſurface de l'Etoile malgré ſa grande force d'attraction ; celle qui produit ſon émanation eſt donc beaucoup plus conſidérable que celle qui produit la peſanteur ſur le corps de l'Etoile ; & par conſéquent l'attraction diminuant dans

le même rapport que l'intenſité de la lumiere, il faut que ſon impreſſion ſur nous ſoit d'autant moindre par rapport à l'impreſſion, déja ſi foible, de ſa lumiere, que la viteſſe immenſe de ſon émanation, l'emporte ſur celle que tend à produire ſa peſanteur.

Si un corps étoit projetté de notre Terre dans une ligne perpendiculaire à l'horiſon, avec une force capable de lui faire parcourir 420 milles d'un mouvement uniforme dans une minute, il s'éleveroit continuellement dans cette ligne & ne retomberoit plus ſur la Terre, ſa gravité retardant ſans ceſſe ſon mouvement, mais ne pouvant le détruire par la diminution qu'elle éprouveroit à meſure que le corps s'éleveroit à une plus grande hauteur : or qu'eſt-ce qu'une viteſſe de 420 milles par minute, quelqu'énorme qu'elle nous paroiſſe, en comparaiſon de celle de la lumiére, qui parcourt plus de 34 millions de lieues en huit minutes? Il eſt donc bien prouvé que l'attraction du Soleil eſt nulle ſur les Etoiles, ou qu'elle n'y peut avoir d'effets obſervables dans une longue ſuite de ſiécles.

Qui ſait au ſurplus ſi le Soleil ne tourne pas avec d'autres Etoiles autour d'un corps

central très-éloigné, & d'autres Etoiles autour d'autres corps centraux, emportant avec elles le ſyſtême entier de leurs Planètes, comme Jupiter & Saturne entraînent avec eux autour du Soleil le ſyſtême de leurs Satellites? * En donnant ce mouvement commun au Soleil & aux Planètes, notre ſyſtême particulier ne ſeroit point troublé; le Soleil & les Etoiles ſeroient ſoutenues à leurs diſtances par leurs mouvemens de révolution, & les corps centraux ſe trouvant placés à telles diſtances immenſes qu'on jugera néceſſaires; il n'y auroit point à craindre qu'ils s'approchaſſent d'aucunes de nos meſures dans des millions de ſiécles; enſorte que s'il n'y avoit d'autres moyens pour prévenir leurs chûtes, l'objection même à laquelle nous

* Dans la ſuppoſition que notre ſyſtême ſolaire change de place par rapport au lieu abſolu, ce changement doit dans la ſuite des temps occaſionner un changement apparent dans les diſtances angulaires des étoiles fixes; & ſi les différents ſyſtêmes des Etoiles ne ſont pas non-plus en repos dans l'eſpace abſolu, il en réſultera un changement réel dans la poſition de quelques Etoiles : or c'eſt ce que les Aſtronomes commencent à ſoupçonner. Si l'on compare la déclinaiſon préſente d'ARCTURUS avec le lieu déterminé par *Tycho* & par *Flamſteed*, on trouvera une différence trop grande pour être rejettée ſur l'obſervation, & cependant indépendante d'aucun mouvement dans notre ſyſtême. Peut-être eſt-ce par ce mouvement que certaines Etoiles ont diſparu, &c.

répondons, seroit une preuve que les choses sont ainsi, & tel seroit le triomphe de l'attraction, qu'après nous avoir dévoilé le principe qui anime le Monde connu, elle serviroit encore à nous faire deviner sa constitution la plus intime, & à éclairer nos regards jusques dans la profondeur la plus reculée des Cieux.

CHAPITRE XI.

De l'Attraction dans les petites distances, son existence & ses loix.

CL. OUTRE cette attraction, qui agit dans les grandes distances, & qui est le ressort du Méchanisme astronomique, M. *Newton* a observé une pareille attraction entre les petites parties de la matiere, qui n'agit qu'à de très-petites distances, qui suit une autre loi, & que la plûpart des Disciples de *Newton* ont regardée comme le principe des opérations chymiques & de beaucoup d'autres phénomènes sublunaires.

Ce Philosophe, qui savoit si bien interroger la Nature, & qui, après avoir

créé l'Aſtronomie - Phyſique, nous a donné l'Anatomie de la lumière & des couleurs, en faiſant luire un nouveau jour ſur ces objets, n'a pas eu le temps de faire aſſez d'expériences pour confirmer ou renverſer ſes premieres vûes ſur cette ſeconde force de la Nature, qu'il ſoupçonnoit entre les particules & les élemens des corps.

Mais quoique cette partie de ſa Philoſophie ſoit encore à peu-près dans ſon enfance, elle offre des détails curieux qu'il eſt important de connoître, & plus encore de ſoumettre au creuſet de l'expérience, pour avoir à cet égard la même certitude que ſur les deux autres parties de ſa Philoſophie.

Ce qu'il faut ſur-tout remarquer, c'eſt que ces deux forces d'attraction ne dépendent point l'une de l'autre; qu'il n'y a point de conſéquence de la première à la ſeconde, ni du renverſement de cette derniere au renverſement de l'autre. Nous ſommes ici dans des fluides actifs & réſiſtans, au lieu que les Cieux ſont vuides, ou remplis d'une matiére qui n'a point été affectée de l'inertie; l'attraction dont il s'agit, n'agit point en raiſon des maſſes, & pourroit être l'effet d'un fluide répandu

dans l'air, ſans qu'on eût droit de conclurre immédiatement la même choſe pour la premiere.

CLI. Qu'il y ait au ſurplus entre pluſieurs particules de la matiere une tendance mutuelle les unes vers les autres; c'eſt ce qu'il eſt difficile de révoquer en doute. Deux gouttes qui s'approchent quand elles ſe toucheut, ou ſont prêtes à ſe toucher, la rondeur de toutes les gouttes de pluie & de toutes les liqueurs, l'inflexion de la lumiere à l'approche d'un corps ſolide avant de l'avoir atteint, * ſa

* L'infléxion de la lumiére auprès des pointes de métal, de bois ou de verre, n'eſt ni augmentée ni diminuée, ni la lumiére ſéparée en ſes couleurs, lorſqu'on électriſe fortement ces pointes; cette inflexion ne vient donc d'aucune athmoſphère ni de l'électricité; l'électricité diffère d'ailleurs du magnétiſme, qui agit ſans préparation, à travers l'eau, la flamme, les graiſſes & l'humidité, ſans petillement & ſans lumiére, ſans odeur & ſans ſaveur; ſur toutes ſortes de ſupports hors le fer, recevant l'électricité par communication, mais n'augmentant point par-là ſa force ſur le fer, ne ſe communiquant qu'à lui, ſe communiquant plus par l'une de ſes extrémités que par l'autre, perdant ſa force par le feu, ce que ne fait pas la tourmaline, ayant des pôles diſtingués & variables. Donc puiſque le magnétiſme differe auſſi de l'attraction, plus foible, plus univerſelle, plus immuable, & d'un plus court rayon; ce ſont là trois forces qu'il ne faut point confondre. Dans les tuyaux capillaires l'effet n'eſt ni augmenté ni diminué par la plus forte électricité, & l'attraction de ces tuyaux eſt ſi puiſſante qu'elle empêche l'évaporation de l'eau pendant près de huit mois.

réflexion du ſein du vuide, en ſortant de la derniere ſurface du corps qu'elle a pénétré, & revenant ſur cette ſurface ſous le récipient de la machine de *Boile*, comme dans l'air libre, ce qui n'a plus lieu, ſi l'eau ou quelque milieu, d'à-peu-près même denſité, touche cette derniere ſurface, en ſont des preuves, comme manifeſtes.

Envain a t-on voulu juſqu'ici attribuer cet effet à l'action d'un fluide environnant. Si la preſſion de ce fluide n'eſt pas égale de toutes parts, elle ne pourra arrondir la goutte, & ne ſeroit propre qu'à troubler la ſphéricité d'une goutte ronde. Si la compreſſion eſt de toutes parts égale, il n'y aura point de mouvement dans la goutte, ni par conſéquent de changement de figure. Suppoſez, par exemple, une goutte ovale; tirez deux ordonnées qui paſſent par ſes foyers; tout le fluide extérieur compris entre ces deux ordonnées prolongées, tendra à applatir la goutte & à raccourcir davantage ſon petit axe; le fluide au-contraire qui preſſera les extrémités du grand axe, & les ſurfaces elliptiques, ſoutenues par les cercles dont ces ordonnées ſont les rayons, tendra à enfoncer ce grand axe & à alonger le petit;

mais cette tendance sera sans effet, parce qu'elle sera soutenue par l'effort qui tend à raccourcir le petit axe, & que les moindres forces ne peuvent vaincre les plus grandes, ni d'égales forces d'autres forces égales.

Si l'on supposoit deux suites de globules décroissans le long des deux axes de cette goutte, de maniere que les deux premiers termes de cette suite fussent égaux à la surface de la goutte, il y auroit plus de termes décroissans depuis la surface jusqu'au centre dans la direction du grand axe que dans celle du petit; & l'on pourroit croire qu'y ayant plus de moyens dans la suite *g* que dans la suite *p*, la même force de l'athmosphère appliquée en *g* & *p*, seroit par la propriété des corps à ressort plus augmentée dans la suite *g* que dans la suite *p*; d'où il suivroit que le centre réagissant plus fortement dans la direction du petit axe ou de la suite *p*, par la communication réciproque du mouvement, que dans la direction du grand axe ou de la suite *g*, il alongeroit le petit axe & accourciroit le grand.

Mais il faudroit pour en venir là, faire, comme l'on voit, des suppositions fort

étranges, qui ne donneroient pas même la conclusion que l'on en tire; d'abord il faudroit des fluides élastiques, & il n'est pas décidé que tous les fluides le soient, l'eau surtout qui est si incompressible; ensuite il faudroit des globules réguliérement décroissans de la superficie au centre; & il seroit difficile d'imaginer pourquoi les globules de l'eau & du mercure seroient de cette nature; pourquoi surtout les globules seroient plus petits vers le centre & à l'extrémité du grand axe. Qu'arriveroit-il si aux deux extrémités du petit axe d'une goutte, l'on plaçoit deux autres gouttes pour produire l'alongement de ce côté-là? Y auroit-il une métamorphose subite des plus gros globules dans les petits?

Mais en accordant aux Cartésiens toute la liberté de feindre qu'ils se permettent ici, l'effet qu'ils prétendent ou qu'ils recherchent, ne s'ensuivra pas. Les globules de *g* & de *p* échangeront, si l'on veut, leur état, par l'entremise de *c*, ce qui n'est pas sans difficulté; en conséquence la réaction vers la surface commencera avec plus de force du dedans en dehors dans la suite de *p*; mais aussi parce qu'il y a moins de termes moyens que dans la

ſuite *g*, préciſément en raiſon de ſon plus de force en commençant, cette force réactive augmentera moins dans la longueur de *p*, que dans celle de *g*, & ces forces redevenant égales à la ſurface, la figure de la goutte ne changera point.

C'eſt ce que l'on verra immédiatement & ſans calcul, ſi ſelon la regle & la nature des choſes, on ſuppoſe les tranches de fluide plus larges & plus minces dans la direction du petit axe que dans celle du grand ; alors on aura le même nombre de tranches dans la profondeur des deux axes, & la même quantité de matière dans chaque tranche reſpective, & par conſéquent la même augmentation de force dans la longueur des deux axes, la même action ſur le centre, la même réaction vers la ſurface. Il eſt donc impoſſible, à s'en tenir là, que la compreſſion d'un fluide quelconque puiſſe arrondir une goutte.

CLII. Pareillement, lorſque deux gouttes ſe touchent ou ſont près de ſe toucher, elles ſe portent l'une vers l'autre pour n'en faire qu'une, & n'en font qu'une en effet. Or ce mouvement qu'elles ont l'une vers l'autre, vient-il d'une force extérieure, d'un fluide environnant? Le fluide qui remplit les angles que

forment les gouttes avant leur réunion, celui qui peſe ſur elles lorſqu'elles ont commencé à ſe toucher, ayant même baſe & même hauteur que le fluide latéral, agit autant pour les écarter, pour les éparpiller, que celui-ci peut agir pour les rapprocher, & par conſéquent leur mouvement d'approximation ne vient pas de là, mais d'une force qui leur eſt propre, d'un mouvement de réciproque attraction.

Des gouttes placées ſur un plan verniſſé, ou ſur une feuille de chou, paroiſſent parfaitement rondes à la vûe ſimple; elles ſont applaties ſi on les poſe ſur un plan plus denſe & plus attirant. Or quel eſt le fluide qui arrondit ces gouttes, qui ſoutient par le bas, non-ſeulement l'effort du fluide ſupérieur qui tend à les applatir & à les écarter, mais encore l'effort de leur propre peſanteur?

Mettez une très-petite goutte de mercure ſur du papier, approchez-en un morceau de cryſtal, levez ce cryſtal, vous verrez la goutte de mercure le ſuivre & quitter le papier; approchez cette goutte élevée d'une autre goutte très-petite, celle-ci s'élancera vers la premiere pour en former une plus groſſe qui s'attachera

encore au cryſtal & s'enlevera avec lui.

Au-contraire, approchez cette goutte d'une goutte plus groſſe que le cryſtal ne puiſſe élever, & la goutte adhérente au cryſtal plus attirée par cette goutte de mercure, ſe réunira à elle & abandonnera le cryſtal.

Variez l'expérience; rempliſſez de mercure par voie de ſuccion un tuyau fort étroit, poſez-le horiſontalement, il en reſtera une petite portion dans ce tuyau; élevez-le, cette partie ne tombera pas: approchez obliquement ce tuyau du vif-argent, qui eſt en maſſe dans la cuvette, & tout ce qui eſt dans le tuyau s'écoulera : cependant le fluide ambiant preſſe le mercure de la cuvette pour le pouſſer dans le tuyau & pour y retenir la petite portion qui y eſt. Pourquoi donc s'écoule-t-elle à ce moment, & qu'auparavant elle étoit ſuſpendue ?

Secouez un peu rudement un Baromètre, & vous verrez la colonne qui deſcend, former à ſa partie ſupérieure une ſurface concave contre le verre, tandis qu'à l'ordinaire elle eſt convexe. Or d'où vient cette ſurface concave, ſi non d'une adhérence au verre, qui ne peut être tout-à-coup convaincue, & cette adhérence, quil a produit dans le Baromêtre ?

Inclinez l'une à l'autre deux glaces de miroir ſous un angle fort aigu, & que leur pointe de concours ou de réunion ſoit tournée vers le bas; gliſſez-y ou laiſſez-y tomber une petite goutte de mercure, elle ſe précipitera dans l'angle & s'y applatira; bientôt après elle remontera, fuira cet angle, & ſe tiendra à une certaine hauteur. Or qui fait remonter lentement cette goutte malgré ſon poids? Qui la ſoutient au deſſus de l'angle vuide où elle étoit auparavant deſcendue? Quel fluide produit cet effet? L'attraction cherche à arrondir la goutte, les parties entrées dans l'angle, plus attirées par le reſte de la goutte que par le verre, remontent, & ce mouvement ne ceſſe que lorſque la goutte eſt à une hauteur qui lui permet de conſerver ſa rondeur.

Si ſur la ſurface extérieure d'un tuyau capillaire vous laiſſez tomber une goutte d'eau, elle deſcend le long du tube, s'il eſt incliné, elle parvient à ſon orifice inférieur, & s'élance avec rapidité dans l'intérieur de ce tube. Or ici il n'y a point de colonnes latérales; le tuyau eſt ouvert par les deux bouts; ſon ouverture eſt de beaucoup plus grande que le trou d'une aiguille, qui ſuffit pour précipiter le mer-

cure dans le Baromètre ; l'expérience réussit dans le vuide le plus parfait, comme dans l'air libre ; où est donc ici l'action d'aucun fluide?

Si vous dites que l'air s'appuie par son ressort contre les parois du tube, & qu'il a par-là moins d'action dans l'intérieur de ce tuyau, j'en conclurai qu'il ne perd de sa pesanteur & de sa force qu'à proportion qu'il est appuyé : or plus il s'applique contre le verre, plus il est arcbouté contre les parois du tuyau, plus il est difficile de le chasser, & plus il résiste à l'élévation de l'eau ; comment donc peut-elle monter? Cet air même ne peut sortir qu'en soulevant la colonne qui lui répond au haut du tube ; or cette colonne ne peut se soulever par les seules forces que l'on emploie ici ; elle est en équilibre avec la colonne qui pousse la goutte dans le tuyau par l'orifice inférieur ; cette colonne même agit avec désavantage pour peu que l'eau ait monté, puisqu'elle se trouve surchargée de son poids. Il arrivera donc ici la même chose, que si l'on appuyoit le doigt contre le haut du tuyau ; nulle liqueur ne s'élévera & n'entrera dans le tuyau.

En comparant la liqueur élévée dans

différens tuyaux capillaires, on trouve qu'il s'en éleve une moindre quantité dans les tuyaux plus étroits, & qu'elle s'y éleve à une plus grande hauteur ; que ce ne sont pas toujours les liqueurs les plus légeres qui s'élevent le plus haut, & que l'esprit de vin, moins pesant, s'éleve beaucoup moins que l'eau. Or ce devroit être le contraire de tout cela dans le systême de l'inégale pression. Si l'air agit moins au-dedans du tuyau qu'au dehors, l'inégalité doit être plus grande quand le tuyau est plus étroit ; & par conséquent la force extérieure doit soulever un plus grand poids ; du moins l'inégalité est la même dans le même tuyau, quelle que soit la liqueur où il est plongé ; c'est donc dans tous les cas la même force extérieure qui doit pousser ou soutenir une plus grande masse dans les fluides plus légers. Tous ces effets ne viennent donc pas de l'action d'un fluide, & il y faut reconnoître la force d'une réciproque attraction.

Enfin pour rendre cette conclusion sensible, qu'on trempe dans l'eau un morceau de sapin, qu'on le mette en équilibre dans l'air à l'aide d'une romaine, & qu'on approche un vase plein d'eau par dessous ; alors l'eau l'attire & en est

attirée, elle s'éleve vers lui & le charge, de manière que si la surface qui touche l'eau est d'un pouce, il faut ajouter de l'autre côté de la romaine une force de 50 grains pour l'arracher & rétablir l'équilibre; or si c'étoit un fluide qui pressât l'eau & la portât vers le sapin où il auroit une action moins libre, on ne voit pas comment l'eau le chargeroit & augmenteroit son poids; il devroit au-contraire diminuer de pesanteur, non-seulement par les regles de l'hydro-statique, qui veulent qu'un corps perde de son poids quand on le plonge dans un fluide, mais par cette force du fluide environnant qu'on suppose soûlever l'eau, vaincre son poids, la presser, la pousser contre le sapin & l'y soûtenir.

CLIII. Les Collecteurs des actes de *Leipsick* comprirent enfin en 1710, que ces effets, & une infinité d'autres qu'il seroit trop long de détailler, ne peuvent venir de la compression d'un fluide environnant, & qu'il faut les rapporter à un principe interne & propre aux corps mêmes. Ce principe, selon eux, consiste dans des athmosphères invisibles qui pénétrent la substance des corps, & se répandent autour de leur surface.

Il existe sans doute de pareilles athmosphères. C'est par elles que deux objectifs de téleſcope ſont ſoutenus l'un au-deſſus de l'autre ſans ſe toucher ; c'eſt par elles qu'une aiguille ſeche, un très-petit globule de mercure, ſurnagent à la ſurface de l'eau, en faiſant dans ce fluide, & tout à l'entour de ces corps, un creux proportionné à leur étendue ou diamètre. Ce ſont elles qui empêchent l'eau de ſe coller à la cire, de ſe joindre aux huiles & aux vernis ; mais c'eſt l'attraction du corps, qui en raſſemble les parties, qui les accumule autour de ce corps, qui les y fixe, & qui les y retient. Un corps qui ſe meut n'emporte pas avec lui l'air qui l'entoure, parce que cet air ne fait pas *un* avec lui ; il ne peut donc, par la même raiſon, emporter ſon athmoſphère, s'il n'a en lui-même une force qui la fixe & qui la retienne. Quand un corps ſe meut il diviſe l'air & l'écarte ſur les côtés : or c'eſt par ſon athmoſphère qu'il le diviſe, parce que c'eſt par elle qu'il le touche ; celle-ci devroit donc s'ouvrir auſſi, s'accumuler ſur les côtés, & donner paſſage au mobile qui s'en verroit dépouillé. C'eſt ainſi que la flamme d'une bougie eſt chaſſée derriere ce corps quand on le

meut : c'eſt ainſi que la queue d'une Comète eſt toujours dirigée à l'oppoſite du mouvement de l'Aſtre.

La Terre même laiſſeroit derriere elle ſon athmoſphère, & les corps poſés à ſa ſurface ſans y être attachés, ſi elle venoit à recevoir une forte impulſion par le centre, ou du moins l'attraction ſeule de la Terre y rameneroit alors ces corps. Si donc il faut reconnoître des athmoſphères répandues autour de la plûpart des corps, il faut en même-temps admettre dans ces corps une force d'attraction qui les raſſemble, qui les uniſſe, qui les fixe & les incorpore avec eux. Au ſurplus, ces athmoſphères pourront être merveilleuſes comme obſtacles, & produire, par leur reſſort & leur impénétrabilité, certains phénomènes apparens de repulſion ; mais elles ne produiront rien comme forces ou comme principes d'attraction ; elles ne peuvent avoir aucune vertu, ſi elles ſont en repos : elles ne peuvent que ſe choquer, ſe balancer, ſe repouſſer, ſi elles ſont en mouvement.

Il faut qu'un fluide enveloppe un corps pour qu'il le précipite ; il ne ſuffit pas que ſes parties aient une radiation analogue aux radiations de la lumiere, comme

l'avoit pensé M. *Leibnits* ; il faut que chacune d'elles soit encore un centre & un principe de radiations analogues ; autrement ce seroit le cas d'un corps plongé dans un fluide pressé par un bout, lequel, selon l'expérience & les loix d'hydro statique, reste en repos au lieu où il est plongé.

Or ces athmosphères des corps étant fort courtes, ne s'enveloppent point l'une l'autre, ni l'une le corps que l'autre entoure ; elles ne peuvent avoir que des radiations communes provenant de l'extérieur, d'un principe étranger pressant par un bout ; & par conséquent elles ne peuvent produire aucune tendance entre les corps qu'elles enveloppent, elles ne peuvent que les repousser.

En effet, qu'arrivera-t-il lorsque ces athmosphères en mouvement viendront à se toucher ? Plusieurs de leurs molécules se rencontreront, se heurteront, se refléchiront, tandis que d'autres répondront aux angles, aux interstices que ces molécules font ; & jusques-là je ne vois que de la répulsion. Approchons davantage les gouttes ; d'une part, les chocs se multiplieront ; de l'autre, les angles se rempliront ; & il continuera de n'y avoir entre ces athmosphères que de la répulsion.

Ce qu'on pourroit imaginer de plus favorable, c'est de ſuppoſer que ces athmoſphères ſont de la nature des liqueurs qui ſe mêlent ſans augmenter de volume. Alors on concevroit que deux gouttes en préſence ſe touchent dejà par leurs athmoſphères; que celles-ci pénétrables entr'elles, impénétrables à l'air, ſont pouſſées de toutes parts l'une contre l'autre par ce fluide; que pouvant ſe mêler ſans augmenter leur volume, & par conſéquent ſans ſoulever la colonne d'air ſupérieur qui peſe ſur elles, elles ſe porteront l'une dans l'autre d'un mouvement accéléré, entraîneront les noyaux qu'elles renferment, qui ſe mouvant auſſi d'une viteſſe accélérée, arriveront au contact avec une proviſion de force acquiſe, ſuffiſante pour s'applatir & ſoulever l'air ſupérieur qui y réſiſte; ce qui permettra aux gouttes de s'arrondir & de n'en compoſer qu'une.

Mais 1°, les liqueurs qui ſe mêlent augmentent toujours un peu leur volume; ce qu'il ne faudroit point ici. 2°. Celles qui, en l'augmentant, en diminuent la ſomme, ſont des liqueurs hétérogènes, & les athmoſphères de l'eau ſont néceſſairement homogènes. Si des liqueurs homogènes ſe mêloient ſans augmenter

de volume, chaque liqueur ſéparément auroit déja fait cette contraction ; & en verſant enſemble deux pareilles liqueurs, le volume total ſeroit le même que la ſomme des volumes ſéparés. 3°. Les liqueurs ne ſe mêlent ainſi en entrant l'une dans l'autre que par une fermentation qui les y force en altérant leurs parties : or où ſeroit ici la fermentation ? 4°. Il faudroit que ces athmoſphères fuſſent imperméables à leurs noyaux, puiſqu'il faudroit qu'elles leurs communiquaſſent la preſſion de l'air environnant : or il faudroit qu'elles leur fuſſent perméables, puiſqu'après s'être mêlées, il faudroit qu'elles laiſſaſſent approcher ces noyaux ; ce qui eſt une contradiction. Comment 5°, ces athmoſphères pourroient-elles ſe mêler ſans être perméables à l'air ? La vapeur de l'eau ne ſe répand-elle pas dans ce fluide avec une grande vélocité ?

Enfin, en admettant toute cette théorie, ce ſeroit toujours l'air qui, au moyen de ces athmoſphères, pouſſeroit les liqueurs dans les tuyaux capillaires : or il eſt démontré en mille manieres, & il eſt ſenſible par le ſeul exemple de pluſieurs liqueurs légeres qui ſe tiennent à

une moindre hauteur, que ce n'eſt pas l'inégale preſſion de l'air, de quelque maniere qu'on l'explique, qui produit cet effet ; une ſeule expérience de M. *Bulfinger* en eſt une démonſtration invincible.

Ce Phyſicien ayant alongé en capillaire la cuvette d'un Baromètre, le mercure contenu dans le tuyau, ſuivit comme dans les autres Baromètres, toutes les variations de l'athmoſphère ; preuve manifeſte que la preſſion de l'air n'eſt point diminuée dans ces ſortes de tuyaux.

Je comprens que la preſſion de l'air peut être diminuée dans un tuyau capillaire, ſans y être anéantie ; je conçois en conſéquence que l'air du tuyau peut, à la longue, paſſer dans la cuvette ; que ſe trouvant là dans un endroit plus large, il y ſeroit dans ſon état ordinaire, s'il y étoit ou y avoit été comprimé par l'athmoſphère ; mais il n'y eſt comprimé que par l'air du tuyau qui preſſe moins ; il n'y eſt donc pas dans ſon état de reſſort naturel, ou du moins il ne doit plus être comprimé lorſque ſa force égale celle qui s'exerce à travers le tuyau capillaire toujours moindre que celle de l'athmoſphère.

CLIV. De toutes ces diſcuſſions il réſulte

résulte qu'il y a entre les petites parties de la matiere *une force d'attraction*, qui agit très-fortement au contact & très-près du contact, & qui s'évanouit à de très-petites distances; & par là même il est aisé de s'assurer que cette force ne suit pas la raison réciproque des quarrés des distances, qu'elle est une autre force que celle qui produit la pesanteur & courbe le mouvement des Astres.

En effet, la masse énorme de la Terre absorberoit toutes ces petites attractions, si cette force suivoit la même loi que la pesanteur, & n'augmentoit pas dans une plus grande raison que l'inverse du quarré de la distance. Elle ne pourroit même, si elle suivoit cette loi, être, comme il faut, sensiblement plus grande au point de contact, qu'à quelque distance de là. Cela paroît par l'exemple des corps pesants, qui, soit qu'ils touchent la Terre, soit qu'ils soient élevés à une assez grande distance, ne montrent point de différence sensible dans leur pesanteur.

Que l'on conçoive un cône touchant à son sommet une particule de matiere qu'il attire; que l'on partage le côté de ce cône d'abord en ses deux moitiés, ensuite dans la moitié de la moitié en

allant vers le ſommet ; on aura entre chaque double diviſion autant de cônes tronqués ; que l'on coupe ce cône en tranches infiniment minces, parallèles à ſa baſe, l'attraction de chaque tranche ſera comme ſa maſſe diviſée par le quarré de ſa diſtance au ſommet du cône: or la maſſe ſera auſſi comme ce quarré, & par conſéquent ſon attraction ſera $a = \frac{dd}{dd} = 1$; & parce qu'il en ſera de même de chaque tranche ; l'attraction d'un cône tronqué ſera comme la ſomme de ſes tranches, c'eſt-à-dire, comme la longueur de ce cône tronqué. La moitié qui touche n'attirera donc pas plus que la moitié qui ne touche pas, & qui eſt diſtante de la particule de toute la moitié de la longueur du cône ; & par conſéquent dans cette loi d'attraction, l'effet ne peut augmenter au contact beaucoup plus qu'à de petites diſtances de ce contact.

CLV. Mais il en ſera autrement, ſi l'attraction ſuit la loi du cube de la diſtance réciproque ; alors elle ſera infiniment plus grande au contact, qu'à la moindre diſtance finie ; car reprenant le cône du numero précédent, dont le côté a été ſuppoſé diviſé en une infinité de proportionnels, dont le premier eſt de

toute la longueur de ce côté, le ſecond de ſa moitié, le troiſiéme de la moitié de cette moitié, ainſi du reſte; on aura une infinité de cônes tronqués, placés chacun entre les extrémités des deux termes conſécutifs de la progreſſion & qui iront toujours en décroiſſant vers le ſommet. Diviſez chacun de ces ſolides ou cônes tronqués en un même nombre de tranches infiniment petites, ou d'élémens; & ſes élémens auront des épaiſſeurs proportionnelles à la longueur des touts qu'ils compoſent, & par conſéquent à leurs diſtances du ſommet du cône, tandis que leurs baſes, qui ſont des portions de ſurfaces courbes qui ont leur centre à ce ſommet, ſeront comme les quarrés de ces mêmes diſtances. La maſſe de chaque élément ſera donc alors comme le cube de ſa diſtance au ſommet du cône, puiſqu'elle ſera le produit de ſon épaiſſeur d par la ſurface de ſa baſe qui eſt dd, & ſon attraction ſera $a = \frac{ddd}{ddd} = 1$; elle ſera par conſéquent égale dans tous les élémens, qui, étant en même nombre dans chaque cône tronqué, donneront une même attraction totale dans chacun de ces ſolides.

Or puiſque la progreſſion eſt décroiſ-

ſante, & qu'elle peut ſe continuer à l'infini, le plus petit ſolide de cette progreſſion, depuis tel terme qu'on voudra aſſigner juſqu'au ſommet qu'on ſuppoſe en contact avec la particule attirée, contient une infinité de ces ſolides ou cônes tronqués, qui ont chacun une attraction égale à celle du plus grand cône tronqué plus éloigné; & par conſéquent il a infiniment plus de force attractive que lui, c'eſt-à-dire, que la plus petite partie de matiere, en contact avec une autre particule, l'attire dans cette loi d'attraction, infiniment plus que le plus grand corps qui n'eſt pas en contact, & qui en eſt à la plus petite diſtance finie.

C'eſt ce que l'on peut démontrer de même par le moyen de l'aire hyperbolique. Soit *P* une particule qui touche le ſommet du cône *P A E a* (*fig.* 26.); concevez le cône diviſé en petites ſurfaces ſphériques égales *A E a*, *M N m*, *B F b*, dont le centre commun ſoit *P* ſommet du cône, & conſidérez la force avec laquelle la ſurface *M N m* tire le corpuſcule *P*. Elle ſera, en raiſon compoſée de la directe de la ſurface attirante & de l'inverſe du cube de la diſtance, puiſque nous ſuppoſons que l'attraction ſuit cette

loi ; elle ſera par conſéquent comme $\frac{PM^2}{PM^3} = \frac{1}{PM}$.

Or, qu'entre ces lignes *PA*, *PH* conſidérées comme aſymptôtes, on décrive l'hyperbole *KVI*, l'ordonnée *MV* ſera en raiſon inverſe de *PM*, & la force attractive de *MNm* ſera directement comme *MV*; ainſi des autres ſurfaces, dont la force attractive ſera par la même raiſon proportionnelle à l'ordonnée correſpondante tirée de l'hyperbole à l'aſymptôte *PA* parallélement à l'aſymptôte *PH*; donc l'attraction du cône tronqué *MNm aEA* ſera meſurée par l'air hyperbolique *MVIA*, & l'attraction du cône en contact *PMNm* ſera meſurée par l'aire hyperbolique, compriſe entre l'ordonnée *MV* & l'aſymptôte *PH*. Or l'aire hyperbolique compriſe entre une ordonnée quelconque déterminée & l'aſymptôte parallèle, eſt infinie (*Sect. con. n*°. 54); donc quand l'attraction ſuit la raiſon inverſe du cube de la diſtance, elle n'eſt pas la même entre les parties & le-tout, & l'attraction de la plus petite partie finie, en contact avec tel corps ou telle particule déterminée, eſt infiniment plus grande ſur cette particule que celle du plus grand corps qui

eſt à la moindre diſtance finie du contact. *

CLVI. Il ſuit de là que, ſi l'attraction eſt encore ſenſible à quelque diſtance du contact, elle eſt abſolument infinie au point du contact; & que ſi, au contraire elle n'eſt que très-grande au point de contact par rapport à la gravité, elle eſt infiniment petite ou nulle, à la moindre diſtance finie.

Or d'une part, il eſt conſtant que cette attraction n'eſt pas au point de contact infiniment ſupérieure à la force qui produit la peſanteur, puiſque quelque grande que ſoit la cohéſion des corps, il eſt toujours poſſible de la rompre; d'ailleurs il paroît certain par les phénomènes, que l'attraction eſt encore obſervable à de

* M. Maclaurin (*Fluxions* 902) a démontré en général que ſi une ſphère eſt compoſée de particules attirantes en raiſon inverſe de l'expoſant n de la diſtance, l'attraction à ſa ſurface eſt à la force avec laquelle toute la matiere de la ſphère ramaſſée au centre attireroit à la même diſtance, comme $3 \times 2^{2-n}$ à $3-n \times 5-n$. D'où il ſuit que ſi $n = 3$, ce rapport eſt celui de 3×2^{-1} à $0 \times 2 = 0$, ou celui de l'infini, comme on vient de le démontrer; que ſi $n = 2$, ce rapport eſt celui de 3×1 à 1×3, ou un rapport d'égalité, comme on l'a prouvé *n*°. 68; que ſi $n = -1$, ce rapport eſt de même un rapport d'égalité; celui de 3 à 4, ſi $n = 1$; & celui de 4 à 5, ſi $n = 0$; c'eſt-à-dire, ſi l'attraction eſt la même à toutes les diſtances.

très-petites diſtances du contact; donc on ne peut ſuppoſer qu'elle ſuit exactement le rapport inverſe du cube, mais ſeulement un rapport moyen entre l'inverſe du cube & l'inverſe du quarré, approchant beaucoup plus du cube que du quarré, comme ſeroit, par exemple, $\frac{b}{x^{2+\frac{100}{101}}}$, & dès-lors elle ne ſera plus repréſentée par l'aire hyperbolique.

Par-là cette force prendra des décroiſſemens beaucoup plus rapides, que ſi elle ſuivoit la Loi du quarré, & elle pourra être exceſſivement plus grande que la peſanteur, au contact & très-près du contact, & s'évanouir enſuite quant à des effets ſenſibles & obſervables à des diſtances encore aſſez petites du contact.

Il eſt vrai que dans notre façon ordinaire d'enviſager les choſes, une telle loi paroît d'abord bien ſinguliere & bien biſarre; mais il ſeroit peut-être plus biſarre & plus ſingulier de la rejetter par cette raiſon. La Nature imite-t-elle notre pareſſe, & affectionne-t-elle, comme nous, les nombres ronds?

CLVII. Il faut donc, pour tout réduire à une loi, ſuppoſer que l'attraction

primitive & universelle de toutes les parties de la matière, n'est exactement en raison inverse, ni du quarré ni du cube de la distance, mais dans un rapport mixte ou certaine fonction de la distance, qui se particularise & se modifie selon les circonstances ; de maniere que nommant x la distance, l'attraction générale soit $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^2 + \frac{100}{101}}$.

Dans les grandes distances cette formule deviendra $\frac{a}{x^2}$, parce que l'autre partie n'est sensible que dans le contact; & la force qui anime les Astres, sera en raison réciproque du quarré de la distance, comme le requiérent les phénomènes. Dans les petites distances & très-près du contact ou au contact, la partie $\frac{a}{x^2}$ sera absorbée par l'attraction de la Terre ; la partie $\frac{b}{x^2 + \frac{100}{101}}$ subsistera , surpassera l'attraction de la Terre ou la pesanteur de toute la quantité nécessaire , & donnera tous les phénomènes rapportés plus haut , ou sera le ressort de toutes les opérations chymiques ; de maniere qu'une seule loi générale suffise pour tous les effets.

Ce n'est point au surplus faire une hy-

pothèſe, que d'admettre cette loi générale; c'eſt conſulter la nature & conclure de ſes effets le principe qui l'anime. Les phénomènes aſtronomiques nous déclarent la force de la gravitation, & nous apprennent qu'elle ſuit dans les Cieux la loi $\frac{a}{x^2}$. Les Phénomènes ſublunaires nous indiquent une pareille force, & requiérent la loi $\frac{b}{x^2 + \frac{100}{101}}$. Donc les particules de la Terre, qui attirent la Lune, ſont douées d'une force qui ſuit cette double loi, ou plutôt cette loi unique & composée; donc cette loi générale ſe résolvant néceſſairement dans la premiere pour les grandes diſtances, & pouvant en mille cas l'emporter ſur elle dans les petites, elle eſt la loi que nous indique la Nature ſans aucune hypothèſe.

CLVIII. D'autres Philoſophes ne reconnoiſſent point la néceſſité de réduire l'attraction à une loi originairement unique; ils croient la Nature plus riche en principes, & ſont peu touchés de raiſonnemens tirés de ſa ſimplicité, dont il ne nous appartient pas de juger. Ils penſent que l'attraction chymique ſuit exactement le rapport inverſe du cube, qu'elle eſt véritablement infinie au contact, &

qu'elle opére par conféquent des effets encore obfervables à de petites diftances du contact; felon eux, la matiere n'a pas été également affectée dans l'origine. Une très-grande, une immenfe partie de fes molécules n'a point été affectée de la force d'*inertie*; & cette matiere a été deftinée à former, à remplir l'*efpace*; une autre partie a été deftinée à agir, & toute a été affectée de l'inertie : une partie de fes molécules a été appellée à agir en raifon inverfe du quarré, une autre, en raifon inverfe du cube, de maniere qu'il y a comme deux efpéces de matiere agiffante, & par-là plus d'élémens pour expliquer l'hétérogénéité des mixtes, & les phénomènes qui l'accompagnent, ou qui en dépendent.

Selon eux, quoique la loi foit complèxe dans les mixtes, elle a été originairement fimple dans les grains qui les compofent, de façon qu'elle foit par-tout comme $\frac{m}{x^2} + \frac{n}{x^3}$, où m défigne le nombre & l'intenfité de la force des corpufcules qui agiffent felon le rapport du quarré, n la multitude & l'intenfité de la force des autres molécules.

Dans les mixtes, où le terme $\frac{m}{x^2}$ fe

trouve seul ou de beaucoup le plus abondant, l'attraction sera *nulle* ou fort petite en comparaison de celle de la Terre par le défaut de corpuscules qui agissent en raison inverse du cube.

Dans les mixtes mêmes où le terme $\frac{n}{x^3}$ sera grand, l'attraction poura être encore fort petite, si les particules qui agissent en cette raison, sont enterrées & comme ensevelies dans les premieres; car cette force décroissant fort rapidement, & le rayon efficace de son activité étant fort petit, elle ne pourra que foiblement percer audelà de l'enveloppe ou de la surface de ces corps.

Mais si le terme $\frac{n}{x^3}$ est tout-à-la fois considérable & distribué dans la masse uniformément, ou peut-être rassemblé vers la surface, il y aura alors une plus grande force d'attraction, ses effets seront les plus grands & les plus sensibles, & ce sera à eux à nous indiquer la constitution intime des corps; ainsi, s'il est vrai que les soufres soient de tous les corps, ceux qui ont le plus de force réfringente par rapport à la lumiére & qu'on ne veuille ou qu'on ne puisse reconnoître une plus grande densité dans les molécules irrégulières du soufre,

que dans celles des corps qui s'arrangent mieux & qui ont plus de dureté & de pesanteur, il y faudra admettre une plus grande quantité de ces parties, qui, dans l'origine ont été affectées de la force $\frac{1}{x^7}$. Ce sera par-là qu'il est soufre & inflammable, absorbant davantage la lumière, multipliant ses chocs & son action dans l'intérieur, étant d'autant plutôt converti en feu & en flamme, qu'il est plus attirant; que la lumiére est moins transmise, plus absorbée & plus égarée dans ses pores; à quoi cependant sa seule hétérogénéité & la différence de ses pores peut suffire.

Un corpuscule doué de la force $\frac{n}{x^3}$ sera un insécable, *Atomus Naturæ*, un véritable indivisible; il attirera à lui d'autres corpuscules indifféremment, il s'appropriera ceux qui seront le plus près de lui, & s'incorporera tout ce qu'il pourra réunir en contact. Comme il y a plus de $\frac{m}{x^2}$ que d'autres corpuscules, ordinairement ce seront ceux-ci qui domineront, & les premiers réunis seront inséparables par toute force de la Nature; ceux qui viendront s'unir ensuite, auront moins de cohérence, & l'on aura tous les prin-

cipes de dureté des corps. Quelquefois des corpuſucules $\frac{n}{x^3}$ en attireront d'autres qui auront à leurs centres d'autres $\frac{n}{x^3}$, mais qui ſeront trop gros pour s'arranger réguliérement autour du premier, & l'on aura toute la variété poſſible de figures dans les mixtes.

Or, diſent ces Philoſophes, pourquoi vouloir que toute la matiere ait été également affectée? peut on la ſuppoſer ſimilaire dans tous les mixtes? ou ſon hétérogénéité peut-elle venir d'ailleurs que de la différence de ſa force? Tous les Phyſiciens ſont obligés de convenir que les premiers élémens ſont durs, & qu'ils ne le ſont que parce que le Créateur les a fait originairement *uns* : or, ajoutent-ils, c'eſt l'attraction cubique qui les rend *uns*, & qui étant féconde en d'autres effets, doit être préférée à cette loi ſtérile d'*indiviſion*, néceſſaire dans tout autre ſyſtême, dans toute autre loi même d'attraction.

CLIX. D'autres enfin ſuppoſent que l'attraction originaire n'eſt ni comme le quarré, ni comme le cube, mais en raiſon inverſe des nombres triangulaires de la diſtance diminuée d'une quantité

conſtante qu'ils prennent pour l'unité, c'eſt-à dire, que l'attraction eſt, ſelon eux, comme $\frac{1}{\overline{D-\frac{1}{2}} \times D} = \frac{1}{DD-D}$. (*Journ. des Sçav. Avril 1764.*)

Si D eſt comme infiniment ſupérieur à l'unité, D peut ſe négliger par rapport à DD, qui eſt d'un ordre plus élevé, & l'attraction ſera ſenſiblement comme $\frac{1}{DD}$. Voilà la gravitation univerſelle qui donne le méchaniſme néceſſaire dans les Cieux.

Si D eſt peu ſupérieur à l'unité, $D-1$ ſera fort petit par rapport à D, & $DD-D$ inſenſible en comparaiſon de DD. Par-là $\frac{1}{DD-D}$ ſera très-grand par rapport à $\frac{1}{DD}$; d'où il réſulte que ſi les élémens groſſiers des corps terreſtres ont un diamètre peu ſupérieur à l'unité qui ſert de module, la diſtance de leurs centres au point de contact, ſera de même peu ſupérieure à l'unité, & leur cohéſion beaucoup plus forte que ſi elle provenoit d'une attraction en raiſon inverſe du quarré.

Si $D = 1$, l'attraction ſera infinie; car alors on aura $DD = D$, $\frac{1}{DD-D} = \frac{1}{0} = \infty$, & un aſſemblage de ſphérules dont les diamètres ſeroient égaux à cette unité, ſeroit auſſi dur que ces ſphérules mêmes.

Si $D < 1$, $D - 1$ eſt négative ; $DD - D$ ou $D - 1 \times D$ le devient auſſi, de même que $\frac{1}{DD-D}$; donc alors l'attraction ſera changée en répulſion.

Si D eſt imperceptible par rapport à 1, de maniere que DD diſparoiſſe devant D, l'attraction ſera $\frac{1}{0-D} = -\frac{1}{D}$ & ſe changera en une répulſion réciproque aux ſimples diſtances ; ce qui donnera le reſſort de l'air & des autres fluides.

D'où il ſuit, que ſans introduire une loi différente pour des particules de différentes eſpéces, mais en appliquant ſeulement la même loi à des particules de différens diamètres, on pourroit rendre raiſon des phénomènes les plus différens ; ſoit dans l'inflexion de la lumière, qu'on ne viendra jamais à bout d'expliquer par aucun athmoſphère, ſoit dans les cohéſions : les tuyaux capillaires, & les affinités chymiques. *

* M. *Newton* s'étant convaincu par expérience que les corps ſulfureux ſont ceux qui ont le plus d'attraction ſous même denſité intégrale ; il a douté ſi l'on ne pourroit pas attribuer l'attraction de tous les corps dans les petites diſtances aux particules ſulfureuſes qu'ils contiennent en abondance, quoiqu'en différentes proportions ; d'où quelques Phyſiciens ont penſé qu'on pourroit expliquer cette attraction de tous les corps dans les petits intervalles, ſans recourir à d'autre loi que celle du quarré,

CLX. De tout cela il réſulte qu'il faut admettre dans tous les mixtes une attraction, outre celle qui produit la peſanteur univerſelle, qui ſuit une plus grande raiſon que celle du quarré de la diſtance inverſe; que la loi préciſe de cette attraction n'eſt pas encore ſuffiſamment indiquée par les Phénomènes, & que les Phyſiciens ne ſe partagent ſur ſon expreſſion, que ſelon qu'ils ſont plus ou moins affectés de ce principe; *qu'il faut multiplier les loix le moins qu'il eſt poſſible & les réduire autant qu'il ſe peut à l'unité*: principe vrai en lui-même, mais dont l'application ne peut ſe faire par des êtres

en ſuppoſant ſimplement que les molécules du ſoufre élémentaire ſont très-irrégulieres, & d'une denſité cent ſeptilions de fois plus grande que la denſité moyenne de la Terre; car alors on aura $P = \frac{m}{rr} = \frac{r^3 d}{rr} = rd$; & ſi l'on prend un corpuſcule de ſoufre de la dix milliéme partie d'un pouce, le rayon de la Terre ne contiendra pas 2500 000 000 000 de ces parties, & ſa denſité moyenne n'étant que la cent ſeptillioniéme partie de celle du ſoufre, ſa force attractive d'où naît la peſanteur, ſera rd, ou $\frac{2500\ 000\ 000\ 000}{100\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000}$, c'eſt-à-dire, comme Newton l'a calculé par l'inflexion de la lumiére, la quatrillioniéme partie de celle du ſoufre élémentaire: or pourquoi, diſent-ils, ne pourroit-on pas ſuppoſer la denſité du ſoufre à volonté, par rapport à la denſité moyenne & peu conſidérable de la Terre; mais cela ſans doute n'eſt pas admiſſible.

bornés

bornés comme nous; de maniere que ce ſera toujours aux phénomènes à nous apprendre juſqu'où la ſimplicité des loix, combinée avec leur fécondité, peut aller.

CLXI. Puiſque cette force d'attraction ſuit une plus grande raiſon, que celle du quarré, qu'elle prend des décroiſſemens ſi ſubits, que ſurpaſſant la peſanteur au contact, ou très-près du contact, elle en eſt ſurpaſſée & n'a plus d'effets ſenſibles à quelque diſtance de là; il ſuit:

1°. *Que l'effet de cette attraction ne dépend point de toute la maſſe du corps attirant*, à moins qu'il ne ſoit fort petit, & *ne pénétre point dans toute la profondeur, étendue ou épaiſſeur du corps attiré*, lorſque l'un & l'autre ont plus de rayon que la ſphère efficace d'activité; il s'enſuit:

2°. *Qu'elle eſt uniquement proportionnelle à la grandeur ou étendue du contact dans les corps homogènes; & dans les corps hétérogènes, à cette même étendue du contact multipliée par la denſité des molécules qui forment ce point de contact.* Sur quoi il faut obſerver que la denſité des parties n'eſt point toujours égale ni proportionnelle à la denſité intégrale des maſſes; étant viſible que des molécules denſes & ſerrées peuvent, par l'irrégularité de leurs

figures, s'arranger mal entr'elles, & composer un Tout rare, ſpongieux, de beaucoup moins denſe qu'un tout qui aura des molécules moins ſolides, mais qui s'arrangeroient mieux ; c'eſt ainſi que l'éponge & le bois plus légers dans leur tout, que de pareils volumes d'eau, puiſqu'ils ſurnagent, ont néanmoins leurs molécules plus denſes, puiſqu'imprégnés de ce fluide ils vont au fond.

3°. Qu'ainſi *les corps les plus peſans ne ſont pas toujours ceux qui ont le plus de cette vertu attractive* ; & que de là peut réſulter la cauſe de la grande vertu reſtringente du ſoufre, ſoit que ſon athmoſphère plus étendue & plus denſe, comme l'indique ſon odeur forte, agiſſe par là de plus loin, plus fortement & plus longtemps ſur la lumiére, que celle des autres corps, ſoit que les molécules même du ſoufre ſoient plus denſes, quoique moins bien-liées, moins bien arrangées entr'elles que celles de l'or, ce qui n'eſt point impoſſible ; ſoit enfin parce que la matière, qui remplit ſes pores, étant trop différente de ſa matiere propre, elle égare davantage la lumiére & la retienne plus fortement.

4°. Que *cette attraction ne peut être*

ſenſible & produire des agitations vives, *que dans de très-petits corpuſcules placés à de très-petites diſtances.* Les grandes maſſes, en effet, ne peuvent avoir que peu de leurs parties dans la ſphère d'activité de cette ſorte d'attraction, du moins dans cette ſphère d'activité où l'attraction eſt puiſſante ; ce qui fait qu'elles n'en peuvent recevoir que des viteſſes réciproques à leurs poids, facilement détruites par la réſiſtance du milieu, par la quantité de leur frottement, qui eſt toujours le tiers de leur poids, & qui ne peut être vaincu par de ſi petites forces.

5°. Que *les corps qui*, *en contact*, *attirent le plus*, *à cauſe de la plus grande denſité de leurs parties*, *ſont auſſi ceux qui*, *toutes choſes égales*, *doivent attirer à de plus grandes diſtances.*

6°. Mais *ſi ſes corps ſont entourés d'athmoſphères plus denſes*, *plus étendues & plus impénétrables*, *ce qui même doit réſulter de leur plus grande force ; alors*, *quoique l'effet de leur attraction pénetre plus loin*, *la plus grande réſiſtance de ces athmoſphères pourra empêcher ou ſuſpendre l'effet de cette plus grande force.* C'eſt pour cette raiſon que le verre qui attire plus que l'eau en contact, paroît attirer une moindre

diſtance, ſon athmoſphère s'étendant loin & n'étant pas facilement diviſée ; c'eſt pour cette raiſon encore, que l'eau s'éleve plus difficilement dans un tuyau capillaire non-humecté ; & quand un pareil tube a été enduit de ſuif, non-ſeulement l'eau eſt exclue du contact immédiat où l'attraction du verre eſt la plus grande, mais eſt encore repouſſée par les corpuſcules groſſiers & odorans qui s'exhalent de la ſubſtance du ſuif.

CLXII. Il ſuit de là que, *quoique la lumiere s'infléchiſſe vers une lame à $\frac{1}{80}^{me}$ de pouce ; cependant ſi on ſuſpend deux fils métalliques, très-déliés à cette diſtance l'un de l'autre, ce n'eſt point une conſéquence qu'ils puiſſent donner des marques d'une réciproque attraction.* Leur frottement ſur le point de ſuſpenſion, * l'attraction

* Si pour éviter le frottement qui ſe fait ſur le point de ſuſpenſion, & l'effet de l'agitation de l'air, vous ſuſpendez à de longs cheveux, ſous un long récipient, des lames très-minces de toutes ſortes de matieres, longues d'un pied, larges d'une demi-ligne, & que vous en approchiez par dehors toutes ſortes de corps, vous verrez à l'aide du Micrometre ces lames s'incliner vers les corps extérieurs que vous en approchez ; ce qui prouve que l'attraction eſt générale, & qu'on l'obſerve toujours lorſqu'on ſait la voir & la rechercher. *Muſchembroeck*, Intr. tom. 1, pag. 350.

même de leurs parties ſupérieures qui tendent à écarter les inférieures, l'air contigu qu'il faut mouvoir & diviſer, l'effort qu'il fait pour ſe placer entre deux corps prêts à ſe joindre & qui l'attirent, l'étendue & la réſiſtance des athmoſphères qui entourent & qui enveloppent ces fils; voilà des obſtacles qui empêchent ces fils de s'approcher, & qui ne peuvent rien ſur les corpuſcules de la lumiere.

Réduits preſque à la petiteſſe des premiers élémens de la matiere, ce n'eſt point en comprimant les athmoſphères, en déplaçant & diviſant l'air; c'eſt en les pénétrant que les corpuſcules de la lumiére ſe portent vers la lame; au lieu que des fils métalliques, entourés d'une athmoſphère qui forme autour d'eux un aſſez large creux, quand on les poſe ſur la ſurface de l'eau, ſont forcés de demeurer à la diſtance qu'exige l'étendue & la denſité de ces athmoſphères, malgré toute leur attraction; c'eſt ainſi que malgré leur peſanteur, deux objectifs de Téleſcope poſés l'un ſur l'autre du côté de leur convéxité, y demeurent ſans ſe toucher par aucun point.

Mais lavez & comprimez ces objectifs & ces fils, afin que leur attraction

n'ait point à ſurmonter la réſiſtance de leurs athmoſphères, alors vous éprouverez que ces fils, que ces objectifs, que leurs poids ne pouvoient auparavant approcher, tiendront fortement l'un à l'autre. Lavez & ſéchez un platteau de verre, & poſez deſſus un fil de fer, ou un tube fort délié, renverſez ce platteau & vous verrez ce tube & ce fil y demeurer attachés, s'y tenir collés, auſſi bien dans le vuide de *Boile*, que dans l'air libre.

Variez cette expérience, entre deux platteaux de verre ou de métal, mettez un fil de ſoie crue pour empêcher le contact immédiat, comprimez légerement les platteaux, & vous éprouverez une forte attraction entr'eux; au lieu d'un fil de ſoie crue mettez-y pluſieurs fils de ſoie torſe, pour augmenter par degrés la diſtance, les platteaux tiendront encore l'un à l'autre, mais moins que quand ils ne ſont pas auſſi écartés.

Il en eſt de même de deux platteaux unis, comprimés l'un contre l'autre, des hémiſphères même de Magdebourg, dont on a pompé l'air; car ils tiennent l'un à l'autre par une force qui ſurpaſſe de beaucoup la peſanteur de l'air; ils tiennent l'un à l'autre dans le vuide, & il y

faut des poids aſſez conſidérables pour les ſéparer. L'adhérence de ces marbres deviendra encore plus grande, ſi avant de les joindre vous rempliſſez les pores, uniſſez les inégalités, augmentez la quantité du contact, en enduiſant leurs ſurfaces d'huile ou d'une autre liqueur. L'air ſans doute y a part; mais l'adhérence ſurpaſſe la force & la preſſion de l'air.

CLXIII. Un Philoſophe a cru trouver par expérience, que l'attraction n'a point de part à cette adhéſion des hémiſphères de Magdebourg; pour s'en aſſurer il fit faire des hémiſphères de différens calibres dans le rapport de 2 à 3, & dont les plans circulaires étoient dans celui de 4 à 9; il fit toucher ces plans par des couronnes égales, de 11 pouces chacune en ſurface; enſuite en ayant pompé l'air, & ayant déduit la force de l'air en raiſon de 4 à 9, il ne trouva pas le reſte de la cohéſion en raiſon d'égalité, comme il lui ſembloit que cela devoit être en conſéquence de l'égalité des ſurfaces des couronnes en contact.

Mais ſans prétendre que tout le ſurplus de la cohéſion des hémiſphères au-deſſus de la force comprimante de l'air groſſier, vienne de l'attraction des couronnes, il

est évident, par le résultat même de ces expériences, qu'on ne peut compter sur elles.

L'air pressant dans la raison de 4 à 9 sur les calottes sphériques de ces hémisphères, leur adhérence totale eût été de 5 à 10, en ayant égard à la quantité provenant de l'attraction des couronnes: or effectivement les adhérences étoient dans ce dernier rapport dans la seconde expérience. Les petits hémisphères soutinrent alors, suivant l'Auteur, un poids de 80 livres, & les grands un poids de 156 livres: or ces mesures sont à peu-près dans le rapport de 5 à 10, & s'éloignent beaucoup du rapport de 4 à 9, le produit des extrêmes & des moyens ne differe que de 20 dans le premier cas; il differe de 96 dans le second.

Il est vrai que dans la première expérience, le rapport s'éloignoit beaucoup de 5 à 10, mais il étoit aussi fort différent de celui de 4 à 9; & quoiqu'il en approchât plus, la distance étoit si grande, qu'on ne peut l'y ramener par aucun moyen. Les poids soutenus étoient alors en raison de 66 ou 64 à 183. Cette différence venoit, selon l'Auteur, du changement de la vis par laquelle on attache

les hémiſphères à la pompe de la machine; mais un changement qui ne devoit produire aucune différence & qui en produit de ſi grandes, prouve d'une maniere inconteſtable l'inexactitude des expériences, & qu'il eſt impoſſible de compter ſur elles. *

Pour rapprocher les faits de ſon ſyſtême, l'Auteur a imaginé de prendre une moyenne proportionnelle arithmétique entre les réſultats de ſes deux expériences, ce qui lui donne le rapport de 73 à 168, non encore exactement, mais à peu-près en raiſon de 4 à 9; mais cette conciliation ne peut s'admettre. La différence qu'a produit ce changement de vis, prouve que l'air n'a pas été exactement pompé : or s'il y eſt reſté de l'air, toute

* M. Muſchembroeck a fait ſur cette matiere des expériences avec beaucoup plus d'exactitude, ayant fait des cylindres de différentes matieres, mais tous de même diamètre, & les ayant comprimés après les avoir enduits de ſuif, il trouva que ceux de verre, d'argent, de cuivre rouge, de fer tendre, de marbre blanc & de marbre noir, cohéroient avec une force de 130, 125, 200, 300, 225, 230 liv. reſpectivement, & qu'en déduiſant 41 liv. pour le poids de l'athmoſphère, il reſtoit 89, 84, 159, 184, 189 livres auſſi reſpectivement; ce qui ne s'accorde pas avec le rapport de la poroſité de ces corps, ni par conſéquent avec l'action d'un fluide ſubtil. (*Muſchemb.* Introd. tom. 259, pag. 392.)

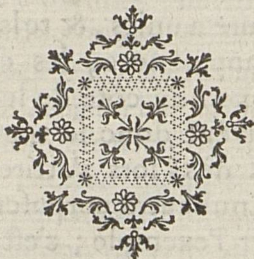
proportion est détruite, & l'expérience ne peut rien apprendre.

Dans ce cas-là même, après avoir évalué la pesanteur moyenne de l'air à $59\frac{3}{4}$ de livres sur les petits hémisphères, & à $134\frac{1}{2}$ sur les grands, l'Auteur trouve un résidu de $13\frac{1}{4}$ & de $34\frac{1}{2}$ qu'il attribue à la pression d'un fluide subtil par dessus la pression de l'air.

Or pourquoi l'action de ce nouveau fluide n'est-elle pas, comme celle de l'air, dans la raison de 4 à 9 ou des bases circulaires sur lequel il pese? Ce fluide subtil se pompe avec l'air, s'il est élastique; il ne repousse point dans l'intérieur, s'il ne l'est pas. Si ce fluide ne passe pas à travers les pores du verre, pourquoi des hémisphères de cette maniere soutiennent-ils quarante livres de moins que des hémisphères de cuivre, selon les expériences de cet Auteur? S'il passe à travers les pores du verre, comment sa pression à l'intérieur est-elle moindre que sa pression à l'extérieur? Seroit-ce parce qu'il lui faut du temps pour y passer? mais n'en a-t-il pas eu tout le temps dans les manipulations, aussi longues que celles qu'exigent ces expériences, ou pourquoi ne le lui avoit-il pas donné? Pourquoi

avoir pris la hauteur moyenne du Baromètre & non pas ſa hauteur actuelle, pour meſurer ſon action dans tous ces effets ?

Une choſe ſur-tout dont il eût fallu s'aſſurer, c'eſt que les couronnes plus larges des petits hémiſphères, s'appliquoient l'une ſur l'autre dans toute leur étendue auſſi exactement que les couronnes moins larges, quoique de même ſurface dans les grands hémiſphères. Or il ſera toujours difficile que cela arrive exactement, & plus difficile encore de s'en aſſurer.



CHAPITRE XII.

Des Opérations Chymiques, & des propriétés de la Lumière, effets de l'attraction sur elles.

CLXIV. QUELQUE polies que nous paroissent les surfaces que l'art a unies, elles sont toutes hérissées d'éminences & d'aspérités qui diminuent la quantité du contact, & par cela même leur attraction; une seule éminence pouvant écarter du contact comme une infinité de points; mais il n'en est pas de même des surfaces que la Nature a unies, & tels sont, selon toutes les apparences, les élémens des corps. Ceux-ci du côté de leurs surfaces planes, doivent donc se toucher parfaitement, & dès-lors s'attirer avec une force dont nul autre corpuscule ne nous peut donner l'exemple; c'est ce qui produit la dureté des corps.

En effet, si vous posez l'une contre l'autre deux surfaces élémentaires, elles ne pourront être séparées par la perpen-

diculaire qu'avec de très - grandes difficultés, & peut-être par une force telle qu'il n'y en a point dans la Nature. Si par leurs extrémités vous leur ajoutez d'autres parties, elles apporteront même résistance à leur séparation perpendiculaire, & par-là empêcheront les premieres de glisser les unes sur les autres. Si vous continuez à faire toucher ces dernieres perpendiculairement aux directions selon lesquelles elles pourroient glisser, par d'autres parties également élémentaires; ces secondes seront empêchées par ces troisiémes, de glisser le long de leur surface, & augmentant continuellement ainsi le nombre des élémens, vous aurez un corps solide qui résistera fortement à sa division; ses seules parties extimes pourroient glisser l'une sur l'autre, puisqu'elles ne seroient point retenues par d'autres parties perpendiculaires, mais elles seront si petites qu'elles ne donneront point de prise séparément à l'action qu'on tenteroit sur elles, &, profondément engagées dans la sphère d'attraction du reste de la masse, elles ne pourront céder à tout effort; ce qui est la propriété des corps durs.

Les élémens qui se toucheront par de plus larges surfaces, auront plus de

cohésion : les élémens les plus denses donneront, toutes choses égales, la plus grande dureté ; mais si ces élémens plus solides sont plus irréguliers, ou se touchent par de moindres surfaces, la dureté du tout sera moindre, quoique celle des parties puisse être plus grande. Le corps sera friable, si les points de contact sont extrêmement petits, & ainsi des autres propriétés des corps, qui paroissent devoir dépendre beaucoup de la figure primitive & originaire des élémens.

CLXV. Si quelques-uns de ces élémens sont sphériques, ils ne se toucheront que par un point. La quantité de leur contact, & conséquemment leur force attractive, sera moindre, & l'on aura un *fluide*. Les Globules les plus gros auront moins de surface à raison de leurs masses; dès-lors la quantité de leur contact sera moindre à proportion ; ils seront plus fluides, & auront moins de *tenacité*, laquelle dépendra toujours beaucoup de l'irrégularité de leurs figures & de leur peu de sphéricité.

En effet, dans une masse de fluide, chaque partie un peu profonde étant également attirée de toutes parts, il n'y aura que les dernieres parties, à peu-près, de la surface, qui plus attirées en dedans

qu'en dehors, ſe comprimeront contre la maſſe & en preſſeront les parties intérieures. *

La chaleur tenant ſes parties ſéparées, diminuera l'effet de l'irrégularité de leurs figures, & par conſéquent leur *viſcoſité.*

Cette chaleur portée à un certain point pourra ſéparer, briſer & arrondir les parties des corps ſolides, & ils tomberont en *fuſion.*

Si les parties n'ont été qu'écartées par

* Cela ſeroit vrai d'un fluide dont les premieres particules ſeroient homogènes; mais ſi nous ſuppoſons, ce qui eſt probable, une grande variété dans la figure & la denſité des molécules d'une même claſſe & du même liquide, alors les attractions oppoſées ne ſeront plus égales, & il y aura, dans l'intérieur même de ces liquides, *viſcoſité* & *cohéſion* par la force attractive de leurs particules.

Si la viſcoſité ne dépendoit que de la denſité des molécules, le liquide, dont les *unités* ou élémens s'attirent le plus, attireroit davantage auſſi le liquide, dont les parties cohérent moins, & l'eau & l'huile ſe méleroient; mais l'attraction dépendant encore de la figure, il doit ſouvent arriver que les molécules d'une claſſe, quoique moins denſes, s'attirent plus parce qu'elles s'ajuſtent mieux, qu'elles ne ſont attirées par celles d'une autre claſſe, plus denſes & plus attractives, mais avec leſquelles elles s'ajuſtent moins bien, & qui dès-lors ſont par rapport à elles d'une moindre attraction reſpective; c'eſt le cas de l'eau & de l'huile, & de tous les corps ſolides qui n'en différent que par le degré de chaleur qu'ils éprouvent; on peut donc expliquer toutes ces répulſions apparentes ſans le ſecours d'aucune athmoſphère.

l'action du feu, dès-que celle-ci cessera, elles reviendront à leurs premiers contacts, & l'on aura le même corps qu'auparavant. Si les unes sont enlevées par le feu, & que les autres changent de figure, ou même si l'un ou l'autre arrive, le corps ne reviendra pas à son premier état par la cessation de la chaleur, & ce sera la *calcination.*

L'action du feu ayant un peu écarté les parties restantes, & ayant enlevé beaucoup d'autres parties, elle a diminué la quantité de contact dans les parties du corps calciné, & ordinairement il est *friable.* La densité des parties ne dépendant point de la densité intégrale du Tout, un corps peut être plus pesant qu'un autre, & avoir moins de contact entre ses parties; il tombera donc plus facilement en *fusion*, & c'est ce qui arrive au plomb le plus pesant de tous les métaux après l'*or.* Si pour fondre du *cuivre* ou de l'*argent*, on y mêle une certaine quantité de *mercure*, l'attraction forte de celui-ci diminuant l'attraction que les parties de cuivre ou d'argent ont entr'elles, ces métaux tomberont plus vîte & plus facilement en fusion, comme l'expérience le justifie. Le soufre a le même effet par rapport

rapport au fer pour la même raiſon, & le fer ſe réſout alors en gouttes ou en grains. Si l'action du feu n'enleve que les parties hétérogènes qui briſoient inégalement la lumiere, & par ces réfractions irrégulieres, l'égaroient dans les pores, après la fuſion, la texture du corps ſera plus égale, plus ſimilaire; la matiere calcinée attirant par-là plus également la lumiére, la tranſmettra plus directement & plus abondamment, ſera dès-lors tranſparente, & ce ſera la *vitrification.*

CLXVI. *Si un corps plongé dans un fluide en attire les parties plus qu'elles ne s'attirent entr'elles, & que ſes pores ſoient pénétrables aux parties de ce fluide, celles-ci ſe porteront avec précipitation dans l'intérieur du corps qui les attire, & les circonſtances pourront être telles, qu'elles en déſuniſſent les parties.* C'eſt ce qu'on voit arriver, lorſque l'on plonge fort légérement un morceau de ſucre dans une liqueur, dans l'eau par exemple, alors les parties de l'eau s'élévent fort promptement dans les pores du ſucre, & nous voyons les parties de celui ci ſe détacher, tomber dans la liqueur, ſe loger dans ſes pores & y demeurer ſuſpendues. Les molécules du ſucre étant fort denſes,

& leurs figures très-irrégulieres, elles attirent l'eau fortement, & cohérent entr'elles par de très-petites surfaces anguleuses; ce qui fait que l'eau s'élevant dans ces espaces libres qu'elles laissent entr'elles, y monte par un mouvement accéléré, & par cette accélération a acquis assez de force pour désunir des parties mal cohérentes.

Trois conditions sont donc nécessaires pour la *dissolution*. Il faut que les parties du fluide soient assez petites pour entrer dans les pores du corps qui y est plongé: il faut que ces parties soient assez grosses pour agir en forme de coins: il faut que le corps plongé les attire plus qu'elles ne s'attirent entr'elles, & que néanmoins son tissu soit tel qu'il puisse céder à la provision de force, & à l'effort qu'elles tiennent de l'accélération; condition qui ne se trouve pas toujours, mais qui doit être souvent possible, à cause de la grande variété des mixtes, & par le principe seul que la *percussion surpasse infiniment la pression*.

En effet, les molécules des corps solides s'attirent par une *force morte*, dont les tendances & les effets sont à tous momens détruits, & ne s'accumulent point;

au lieu qu'ils s'accumulent dans un fluide qui se porte dans leurs pores par un mouvement accéléré ; d'où il doit souvent arriver que, quoique le mouvement commence par la différence d'attraction entre le solide & les parties du fluide, cependant l'accélération soit si vive, que le fluide soit par elle mis en état de diviser les parties du solide ; cela arrivera nécessairement, lorsque le canal des pores, qui avoit jusqu'ici donné passage au fluide, se trouvera un peu rétréci.

C'est par ce principe que l'eau dissout les *sels*, l'esprit de vin les *résines*, l'eau régale l'*or*, & l'eau forte le *fer* ou l'*argent*. Les parties de l'eau sont apparemment trop grandes pour pénétrer les résines dont le tissu est fort serré; & l'esprit de vin trop chargé de parties salines, pour être suffisamment attiré par de nouveau sel. Lorsqu'on dissout du sel armoniac dans l'eau forte, la fermentation est si violente, que si on ne fait le mêlange peu-à-peu, le vaisseau se met en piéces : or cette fermentation violente doit briser & atténuer les parties des deux matieres; & par conséquent l'eau forte qui ne pouvoit pénétrer l'or, peut entrer dans ses pores lorsqu'elle est convertie en eau régale,

& le diſſoudre par cela même : mais parce que le ſel armoniac eſt composé de corpuſcules dont l'attraction eſt fort grande, l'excès de l'attraction de l'argent ſur celle des parties de ce menſtrue, n'eſt plus ſuffiſante pour leur donner une viteſſe capable de diſſoudre l'argent.

CLXVII. *Si l'air nage dans un fluide plus ſubtil & moins attractif que lui, chaque particule d'air s'aſſociera pluſieurs particules de ce fluide, & ſe formera une athmoſphère compoſée de ces particules*, de maniere que les couches plus éloignées ſeront moins adhérentes, & le terme de cette athmoſphère ſera le lieu où l'attraction de l'air, plus forte dans l'origine, ſera, par le ralentiſſement que cauſe la diſtance, égale à celle que les parties du fluide exercent entr'elles.

Si donc deux particules d'air revêtues de leurs athmoſphères dans toute l'étendue que leur attraction comporte, ſont contigues, elles ſeront en repos l'une auprès de l'autre, à ne conſidérer que leurs forces ; mais ſi on vient à les comprimer, une partie de ces athmoſphères ſera obligée de s'échaper d'entre les particules d'air, & apportera à cela de la réſiſtance par l'attraction qu'elle éprouve

de la part de ſon noyau qui cherche à les retenir.

Si on les comprime davantage, d'autres couches athmoſphériques plus proches, ſeront chaſſées d'entre les particules, & plus attirées par elles, réſiſteront à leur déplacement plus que les premieres, & ainſi des autres, comme le requièrent les phénomènes des corps à reſſort.

Mais ſi la compreſſion ceſſe, les parties chaſſées d'entre les particules, & continuellement attirées par elles, ſe porteront dans leur intervalle, comme l'eau s'inſinue entre les parties du ſucre, y paſſeront d'un endroit plus large dans un endroit plus étroit, accéléreront leurs mouvemens par l'impreſſion continue de l'attraction, & par la force du coin écarteront les particules d'air & les porteront à la même diſtance qu'auparavant.

Or, non-ſeulement il y aura alors répulſion, mais elle ſera, ſinon exactement, du moins ſenſiblement, en raiſon inverſe des particules d'air comprimées. L'écartement des particules d'air ſera proportionnel au nombre des parties du fluide qui rentreront entr'elles, & ce nombre ſera le même que celui qui en

aura été chaſſé par la compreſſion. Il ſera donc d'autant plus grand que cette compreſſion aura été plus forte, & que les parties d'air auront été plus rapprochées; ce qui donnera *la répulſion en raiſon inverſe de la diſtance des particules d'air.*

Mais ſi d'autres corpuſcules, comme ceux du ſoufre, viennent à nager dans l'air, & qu'ils aient plus d'affinité avec ce fluide athmoſphérique, que n'en ont les particules d'air, ce fluide athmoſphérique abandonnera l'air pour ſe joindre au ſoufre, l'air perdra ſon reſſort, ſes parties ſe rapprocheront tant par leurs poids, que leur attraction; elles viendront peut-être à ſe toucher, & il s'en formera des maſſes qui pénétreront l'eau & les autres corps, juſqu'à ce que par l'action du feu, ou de quelques fermentations particulieres, ſes parties écartées de nouveau recommencent à ſe former des athmoſphères, qui augmenteront ſon volume & lui rendront ſon reſſort.

CLXVIII. Pour concevoir plus diſtinctement cet effet, ſuppoſons qu'entre deux parties de ſel il y ait une partie d'eau de même volume; ſoit r le rayon, a la denſité du ſel, c celle de l'eau; ſi le ſel étoit contigu au ſel, chaque grain ſe

colleroit contre l'autre grain par une force aa diviſée par une certaine fonction n de la diſtance de leurs centres $= 2r$, & la ſomme de leur adhérence ſeroit $\frac{2aa}{2^n r^n}$.

Mais par la partie d'eau interpoſée, le ſel eſt diſtant du ſel, centre à centre, de la quantité $4r$, & dans cette poſition le ſel attire le ſel avec une force $= \frac{2aa}{4^n r^n}$. Or ſi dans cet état on eſſaye de chaſſer l'eau, elle ſera retenue & réattirée par chaque ſel avec une force $= \frac{ac}{2^n r^n}$, & par les deux ſels avec une force $= \frac{2ac}{2^n r^n}$; donc ſi $\frac{a}{4^n} = \frac{c}{2^n}$, il y aura *équilibre*. Si $\frac{a}{4^n} > \frac{c}{2^n}$, il y aura approximation des ſels, ou *coagulation*; mais ſi $\frac{a}{4^n} < \frac{c}{2^n}$, la force de l'eau contigue pour entrer entre les ſels, ſera plus grande que celle des ſels pour la chaſſer, & il y aura *répulſion* des ſels. Donc le rapport de a à c étant infiniment variable, tantôt on aura celui qui donne équilibre, tantôt celui qui donne approximation, tantôt celui qui donne

répulsion, comme le requiérent les différens phénomènes.

S'il y a deux parties interposées, la distance des parties de sel, centre à centre, sera $6r$, & la somme de leurs attractions sera $\frac{2aa}{6^n r^n}$; celle de chaque partie d'eau vers un sel $\frac{ac}{2^n r^n} + \frac{ac}{4^n r^n}$, & celle des deux $\frac{2ac}{2^n r^n} + \frac{2ac}{4^n r^n}$. Si donc $\frac{a}{6^n} = \frac{c}{2^n} + \frac{c}{4^n}$, il y aura équilibre; *attraction* des sels, s'il est plus grand; *répulsion* de ces sels, s'il est plus petit.

Si $n = 2$, $\frac{a}{6^n} = \frac{a}{36}$, & $\frac{c}{2^n} + \frac{c}{4^n} = \frac{5c}{16}$; donc il y aura équilibre, si $\frac{a}{36} = \frac{5c}{16}$, ou si $a. \ 5c :: 36. \ 16$, & par conséquent si $a. \ c :: 180. \ 16 :: 11\frac{1}{4}. \ 1$. Si a est à c dans un plus grand rapport, il y aura *attraction*, s'il est dans un rapport moindre, *répulsion*.

Si $n = 3$, $\frac{a}{6^n} = \frac{a}{216}$, & $\frac{c}{2^n} + \frac{c}{4^n} = \frac{9c}{64}$. Il y aura donc équilibre des sels, si $a. \ 9c :: 27. \ 8$, ou $a. \ c :: 27. \ \frac{8}{9}$; *attraction* si a est à c dans un plus grand rapport; *répulsion*

ſi ces quantités ſont dans un rapport moindre, ce qui eſt très-vraiſemblable & très-plauſible par rapport à l'air & à ſon diſſolvant.

D'où il réſulte que, quoique les parties de l'air, lorſqu'elles ſe touchent, s'attirent plus fortement que le fluide qui les entoure, ce n'eſt plus la même choſe dès-qu'elles ſont revêtues de leurs athmoſphères, & que le rapport de la denſité de l'air à ce fluide peut être tel qu'il en réſulte une répulſion dans les particules de l'air ; ce qui fait ſon *élaſticité.*

Si les molécules de l'air étoient de la nature de l'éponge, ou d'une contexture pareille, le fluide où l'air nage, pourroit ſe porter dans les pores de cette éponge, & en être chaſſé, comme l'eau pénétre dans nos éponges & en eſt chaſſée par la compreſſion. Ce fluide gonfleroit donc alors les particules d'air, & chacune priſe ſéparément ſeroit *élaſtique*, comme le Tout l'eſt par les explications précédentes.

CLXIX. Puiſque l'air eſt élaſtique, qu'il eſt retenu & engagé dans les cellules de la plûpart des corps, il s'enſuit que pour cette raiſon ſeule, la plûpart des corps doivent avoir plus ou moins de

reſſort, ſelon qu'ils contiennent plus ou moins d'air engagé, que celui-ci eſt plus ou moins libre, & s'échappe plus ou moins de ces corps par la compreſſion.

Mais l'attraction qui noùs donne le reſſort de l'air, nous donne auſſi immédiatement celui de la plûpart des corps; celui même du fluide qui le diſſout & dans lequel il nage. L'air n'a pourtant que fort peu de réſiſtance au mouvement, il faut que le fluide dans lequel il nage ſoit fort rare & très-peu réſiſtant; il eſt donc néceſſaire d'en concevoir les parties, comme autant de ſphères creuſes contenant très-peu de matiere, relativement à leur volume. Or ſi l'on comprime des ſphères creuſes, dont les parties cohérent aſſez fortement, une partie de leur ſurface rentre en dedans, & les particules qui la composent ſont forcées de s'écarter les unes des autres à de petites diſtances. Si donc la texture eſt telle, que la force comprimante ne puiſſe les éloigner au-delà de leur ſphère d'attraction, auſſitôt que la compreſſion ceſſera, elles ſeront forcées de ſe rapprocher par un mouvement accéléré, de revenir à leur premiere ſituation, de paſſer un peu au-delà en vertu du mouvement acquis,

de ſe r'ouvrir par ce tranſport, au-delà du lieu d'équilibre ou de repos, pour ſe rapprocher enſuite, & après quelques oſcillations continuellement moindres, reprendre enfin leur premiere figure.

Il en ſera de même des corps ſolides lorſque leur texture ſera telle, que les parties écartées ne ſeront pas au-delà de leur ſphère d'attraction, & n'acquerront pas de nouveaux contacts; mais ſi les parties ont trop peu d'attraction; ſi elles s'écartent trop, ſi elles acquierrent de nouveaux contacts, le corps reſtera comprimé, & ſes parties n'auront point de force pour revenir à leur premiere ſituation; ainſi le feu détruira ordinairement le reſſort des corps en changeant leur texture, altérant la figure de leurs parties, les écartant, en chaſſant pluſieurs d'un certain ordre, & y en ſuſtituant d'autres différemment combinées & d'une moindre vertu attractive, comme ſes propres particules, & beaucoup de molécules d'air.

Si même dans les corps à reſſort, dans le verre, par exemple, quelques-unes de ſes parties entrent trop avant dans les cellules qui les ſéparent, & s'approchent trop de la cloiſon voiſine, alors

puissamment attirées par cette cloison, elles demeurent dans cette situation, tandis qne les autres reprennent leur premier état; c'est ce qui fait la félure du verre.

La lumiere ayant le temps de parvenir au sommet de sa courbe, avant que d'atteindre cette cloison enfoncée, elle n'est plus transmise, mais réfléchie. La même chose arrivera, si on touche un verre bien chaud avec un corps froid; car le froid rapprochant les parties d'un côté, tandis que la chaleur les dilate de l'autre, il est nécessaire que les différentes cloisons se separent; ce qui fait la *rupture*.

On peut encore concevoir autrement le ressort des corps durs; car qu'une molécule ronde soit obligée de devenir ovale par la compression de l'air, de maniere que les extrêmités de son grand axe soient encore engagées dans la sphère de leur mutuelle attraction; il est sensible que la compression cessant, il n'y aura point équilibre dans cette molécule, sans avoir repris sa figure sphérique. Les parties du grand axe qui forment son excès de longueur sur le petit axe, étant comprises dans leur sphère d'activité, feront effort pour s'approcher, & le reste

de la maſſe étant à égales diſtances du centre, & par conſéquent en équilibre, rien n'empêchera l'effet de ces tendances, dès-que la force de percuſſion ceſſera. Il en ſera donc de même de la figure totale du corps, lorſqu'il ſera compoſé de pareilles ſphérules; & parce que la percuſſion n'a pu, à cauſe de la force attractive des parties, alonger ces ſphérules au-delà du rayon d'activité des extrêmités du grand axe, l'approximation accélérée de ces extrêmités rendra en ſens contraire toute la viteſſe de la percuſſion.

Mais ſi ces ſphérules ont trop de diamètre, ou ſi la texture de leurs molécules eſt ſi foible, que par la force de percuſſion elles ſoient alongées au-delà de la ſphère d'activité des extrêmités du grand axe, tant elles que le corps qu'elles compoſent demeureront en l'état où la percuſſion les aura mis, & il n'y aura point de reſſort.

Il en ſera de même de l'*incurvation*; les parties qui compoſent la ſurface extérieure, s'écarteront; celles de la ſeconde couche s'écarteront de même, mais le feront moins, & ainſi des autres; celles de la couche inférieure pourront au-contraire être obligées de s'approcher un peu

plus les unes des autres. Si donc la cohésion est telle, que les parties qui s'éloignent ne le fassent pas au-delà de leur sphère d'activité, & que celles qui s'approchent ne le fassent pas jusqu'à se toucher; dès que la cause qui courbe ou infléchit la lame, cessera, les parties supérieures écartées se rapprocheront, & comme elles sont en plus grand nombre, la somme de leurs forces l'emportera sur l'attraction des parties inférieures, qui aura été augmentée, & le tout se restituera, d'autant plus que les parties de la couche inférieure auront été obligées de s'alonger dans une direction perpendiculaire à la courbure, & que les extrêmités de leurs grands axes pesant sur leurs centres, contribueront presqu'autant à écarter ces molécules, que leur attraction latérale tendra à les retenir.

CLXX. *Si des corpuscules nageant dans un fluide, s'attirent plus que ne font les parties du fluide, & plus que celles-ci n'en sont attirées, ils se porteront l'un vers l'autre par un mouvement accéléré; & si ces corpuscules sont élastiques, ils produiront des mouvemens intestins dans le fluide.*

Car reprenant les dénominations de l'article 168, nous avons vu que, si

$\frac{a}{4^n} > \frac{c}{2^n}$, il y aura approximation des corpuſcules, malgré le fluide interpoſé, laquelle ſe fera par un mouvement accéléré. Si donc les corpuſcules ſont élaſtiques, ils ſeront réfléchis avec toute la viteſſe acquiſe par l'accélération, malgré la force de leur attraction au point du contact, qui, quoique plus grande que par-tout ailleurs, n'eſt qu'une *force morte* qui s'éteint à chaque inſtant, & ſe renouvelle ſans ceſſe ſans s'accumuler; en ſe portant l'un contre l'autre par cette viteſſe de réflexion, ils l'augmenteront en s'approchant par leur attraction, & ſe refléchiront par-là avec plus de viteſſe que la premiere fois; leur mouvement s'augmentera ainſi à chaque nouvelle rencontre & à chaque réflexion, ils produiront dans le fluide des mouvemens ſenſibles en tout ſens, proportionnés au reſſort & à l'attraction des corpuſcules, exprimeront l'air contenu dans les interſtices, exciteront des vibrations & des mouvemens troublés juſques dans les parties inſenſibles de ce fluide; & de-là les *ébullitions*, les *efferveſcences*, & les *fermentations Chymiques*.

Si au contraire les corpuſcules ne ſont

pas élaſtiques, ils reſteront collés les uns aux autres, & l'on aura un *coagulum*; ſi les petites maſſes qu'ils composeront alors, ſont plus peſantes qu'un pareil volume de fluide, ſans pouvoir ſe loger dans ſes pores, on aura une *précipitation.* Si les premiers élémens de ces corpuſcules ont une ſtructure & une organiſation particulière; ſi chacun d'eux, ou à raiſon d'une inégale denſité ou à raiſon d'inégales ſurfaces dans les côtés de leur ſuperficie, s'attirent plus d'un côté que de l'autre, ils ſe joindront toujours de ce côté, & par-là même leurs concrétions affecteront toujours une forme & une figure particulière & déterminée; c'eſt ainſi que les ſels ſe précipitent en *cryſtaux* d'une forme conſtante dans les ſels de même eſpéce & infiniment variée ſelon les différens ſels.

CLXXI. Dans les chocs multipliés que produit l'éffervesſcence, ou dont elle eſt l'effet, les parties du corps les plus ſubtiles doivent être lancées avec une très-grande rapidité à de grandes diſtances de ce corps, laquelle ſera en raiſon compoſée de la directe du degré d'effervesſcence, & de l'inverſe de la groſſeur des parties; donc l'effervesſcence du Soleil, étant ce que

que nous pouvons concevoir de plus grand en ce genre, & la lumiere ce que nous pouvons imaginer de plus ſubtil, elle eſt lancée du corps du Soleil avec une immenſe rapidité, & elle conſiſte dans de continuelles *émanations* de cet Aſtre. *

Le ſon conſiſte dans des pulſations excitées dans l'air, & ſur cette ſimilitude Deſcartes a penſé que la lumiére conſiſte dans des ondulations produites dans un fluide ſubtil qu'on nomme *Ether*. Mais rien n'eſt plus frivole que cette induction; l'odorat eſt un ſens auſſi-bien que l'ouie, & cependant il eſt bien reconnu que les odeurs conſiſtent dans des émanations des corps odoriférans. Lorſque les épiceries ſont dans leur maturité aux Iſles des Indes, on le connoit par l'odeur

* Ainſi chaque point enflammé de la ſurface du Soleil forme une aigrette de *lumiére*, comme les pointes ou les angles dans l'électricité. Les points de chaque aigrette ſont lancés avec différentes viteſſes, ſoit à raiſon de leur inégale groſſeur ou denſité, ſoit par l'improbabilité infinie qu'il y a que tous ces points puiſſent recevoir la même viteſſe d'un mouvement auſſi troublé que l'ébullition; & cela fait la différence des *couleurs*. Une premiere vibration finie recommence par l'efferveſcence, & le Soleil continue d'être lumineux; & ſi pluſieurs points continus ſont quelque-temps ſans ſe renflammer, on voit des *taches* ſur le Soleil.

à trois ou quatre lieues de diſtance. Les aromates de l'Iſle de Ceylan ſe font ſentir ſur mer à une diſtance où l'on auroit peine à entendre le bruit du canon. Pourquoi donc la lumiére ne ſeroit-elle pas pareille une émanation, & de quel droit voudroit-on la comparer au ſon plûtôt qu'aux odeurs ? Il eſt évident au contraire qu'elle a une oppoſition marquée avec la maniere dont le ſon ſe propage ; le ſon ſe répand en rond, & les plus ſûres expériences apprennent que, ſi on l'excite hors d'un appartement où il y ait une ouverture, il ſemble venir de l'ouverture même dans tous les lieux de cet appartement. La lumiére au contraire ſe propage en ligne droite, & reçue par le trou fait à une chambre obſcure, elle ne l'éclaire pas toute entiere. Le ſon ſe propage à travers des tuyaux recourbés avec la même facilité qu'à travers des tuyaux droits ; on ne réuſſira jamais à faire paſſer la lumiére à travers de tels tuyaux.

En effet, toute portion d'un fluide élaſtique, qui a été réduite à un état de plus grande condenſation, ne ſe reſtitue pas ſeulement dans la ligne de compreſſion, mais agite néceſſairement, & met

en mouvement les particules voisines, comme on le voit dans les ondes excitées dans l'eau ; & il est impossible qu'un globule d'éther ne réponde pas à la fois à plusieurs globules supérieurs, ce qui écarteroit le mouvement à droite & à gauche & dans toutes les directions, suivant les loix du choc oblique, & par la nature de tous les fluides qui exercent en tous sens, non-seulement leur pesanteur, mais toute pression, même reçue de l'extérieur. Il en seroit donc ainsi de l'éther ; il répandroit par-tout la lumiére, & nous serions encore en plein jour, lorsque le Soleil seroit profondément enfoncé sous l'horison.

Si l'éther étoit composé de globules sans ressort, comme Descartes le supposoit, la lumiére viendroit du Soleil à nous dans un instant, & sans aucun intervalle de temps ; & l'on sait qu'elle emploie 7 à 8 minutes pour faire ce trajet. Or d'où viendroit le ressort de l'éther ? Ce ressort posé il faudroit concevoir l'éther comme une matiere crépée & filamenteuse 400000000 de fois plus rare que l'air ; (n°. 54.) ce qui sans doute n'est point vraisemblable ; il ne l'est pas que le monde soit infini, ce qu'exigeroit la

conſervation d'un tel fluide élaſtique.

Enfin la lumiére eſt un feu, & tout feu conſiſte dans une agitation & un tranſport de parties. Tous les corps ardens & lumineux que nous connoiſſons, diminuent & ſe conſument par l'émanation ſucceſſive de leurs parties; ce qui nous indique que leur lumiére ne conſiſte que dans des émanations plus rares & plus ſubtiles. *

On ne doit pas craindre cependant que la ſubſtance du Soleil s'épuiſe par cette émanation. La lumiére eſt ſi ſubtile, qu'il faudroit des millions de ſiécles pour qu'il s'épuiſât. Quelque grand que ſoit l'eſpace renfermé ſous la ſphère des Etoiles fixes, il ne renferme qu'un nombre fini de cubes contigus du diamètre le plus imperceptible & le plus petit qu'il vous plaira d'aſſigner. On peut donc diviſer un grain de ſable en aſſez de parties pour en placer une au centre de chaque cube: or détruiſez ces cubes & laiſſez ces parties

* En effet, la lumiére ramaſſée au foyer d'un miroir fond les métaux, à quoi il ne paroit pas qu'une ſimple vibration, une ſimple preſſion puiſſe ſuffire. Tout au moins faudroit-il alors avoir égard à l'action latérale des globules comprimés; ce qui ſeroit avouer que la lumiére doit ſe répandre en rond, & ne le peut faire en ligne droite.

l'eſpace en ſera rempli, & ces parties ne ſeront diſtantes l'une de l'autre que de la valeur d'un côté d'un de ces cubes que vous avez ſuppoſé le plus petit qu'il ſe puiſſe imaginer. La lumiére peut donc être préſente par-tout, & toute celle qui eſt renfermée ſous la ſphère des Etoiles fixes ne pas peſer un grain. Il faut même que la choſe ſoit ainſi, vu l'immenſe viteſſe de la lumiére & ſon peu d'effet ſur l'œil & ſur les fleurs tendres des végétaux.

Soit 1 la denſité du Soleil, $\frac{1}{n}$ celle de la lumiére à la diſtance de la Terre, M. *Euler* démontre (*Opuſc. pag.* 178.) que la perte que fait le Soleil en une ſeconde eſt à la maſſe entiere de cet Aſtre comme $54000 \times \frac{1}{n}$ à 1 ; qu'elle eſt en un jour $4665600000 \times \frac{1}{n}$, en un an $1704110400000 \times \frac{1}{n}$ & en cinq mille ans $8520552000000000 \times \frac{1}{n}$; d'où il conclut qu'afin que cette perte ſoit inſenſible dans un ſi long eſpace de temps, il faut que n ſoit au moins cent fois plus grand que 8520552000000000, & que la denſité de la lumiére à nos diſtances ſoit à celle du Soleil comme 1 à un trillion ; c'eſt-à-dire, comme 1 à 1000 000 000 000 000 000, ce qui lui

paroît incroyable, & ce que nous avons vu être au contraire très-plausible, vû le peu d'effet de la lumiére sous son immense vitesse.

Boile a trouvé qu'un grain de cuivre dissous contient 22788000000 parties visibles : or le nombre vrai des particules de ce grain de cuivre, peut facilement être supposé 1000000 fois plus grand & égal à 22788000000000000, à cause de la foiblesse du dissolvant.

Donc si l'on suppose les parties de la lumiére seulement 43 fois plus petites que celles du cuivre, un rayon de lumiére depuis le Soleil jusqu'à nous, pourra contenir 1000 000 000 000 000 000 de ces parties & ne peser qu'un grain ; donc sa densité sera à un grain de matiere solaire comme 1 à 1000000000000000000, précisément dans le rapport demandé. *

En effet, si dans le systême des émis-

* L'Hémisphère céleste peut contenir 1000, 000, 000 000 ; 000, 000 Etoiles dont le diamètre apparent seroit de $1''''$; un homme couché regardant le Ciel par le trou d'une éguille fait à un papier, verroit toutes ces Etoiles, & en supposant qu'il ne vint de chaque fixe à son œil que 100 rayons, il faudroit qu'il en passât librement par le trou 100, 000, 000, 000, 000, 000 : or on peut faire passer par le trou d'une éguille que 20 cheveux

ſions il y avoit lieu de craindre que le Soleil ne ſe diſſipât, il faudroit craindre auſſi que ſon mouvement ne s'épuiſât dans l'hypothèſe des vibrations de preſſion. Selon les Cartéſiens le Soleil preſſe continuellement la matière qui l'environne, & communique à toute la maſſe énorme qui compoſe ſon tourbillon ce mouvement de vibration dans lequel ils font conſiſter la lumiére; il doit donc, dans leur ſyſtême, perdre autant de ſon mouvement qu'il perdroit de ſa matière dans le ſyſtême des émanations; & parce qu'ils admettent un plein ou parfait ou preſque parfait, la perte de ſon mouvement devroit être immenſe & comme inſtantanée.

CLXXII. C'eſt un principe d'expérience, que les corps propres à recevoir des oſcillations, ne font cependant des vibrations iſochrones que ſur la fin de leur mouvement, & lorſqu'il eſt très-rallenti. Une corde rudement frappée

à peu-près; & par conſéquent il faut que chaque rayon ſoit 5000, 000, 000, 000, 000, plus petit qu'un cheveu, c'eſt-à-dire, d'une petiteſſe incompréhenſible, ce qui rend inſenſible la perte que fait le Soleil, quand même elle ne ſeroit pas réparée par les rayons qui lui viennent des Etoiles, ou par la chûte d'une Comète.

rend au commencement de ſes oſcillations un ſon beaucoup plus aigu que ſur la fin, où le même ton continue & indique l'iſochroniſme des vibrations ; il en eſt donc de même des parties qui ſont en efferveſcence, & en èbullition à la ſurface du Soleil. Elles n'ont pas toutes le même degré de vibration, & chacune ne fait pas, dans toute la durée de ſon mouvement, des oſcillations iſochrones ; elles lancent donc continuellement les particules de la lumiére avec des viteſſes différentes ; & c'eſt dans la différence de ces viteſſes, que conſiſte principalement la différence des couleurs trouvée & démontrée par *Newton*.

Il paroit ſuivre de-là que, quand un Satellite de Jupiter ſort de l'ombre de cette Planète, il devroit d'abord paroître rouge & ſucceſſivement teint de toutes les couleurs, juſqu'à ce que par leur réunion, il eût une couleur tirant ſur le blanc ; mais comme il faut toujours qu'une partie aſſez conſidérable de la Planète ſoit ſortie de l'ombre, avant qu'elle puiſſe faire aſſez d'impreſſion ſur l'œil pour être apperçue, le temps qu'il faut pour que l'émerſion ſoit ſuffiſante, doit être aſſez long pour qu'il ſoit dejà

arrivé des rayons violets des premieres parties ſorties de l'ombre, lorſque les ſuivantes envoient leurs rayons rouges ; ce qui donne $\frac{1}{41}$ de différence pour l'excès de la viteſſe des rayons rouges ſur la viteſſe des rayons violets.

CLXXIII. Ces Principes poſés, lorſqu'un rayon tombe obliquement de l'air dans l'eau & qu'il commence à en être très-près, il eſt attiré perpendiculairement à la ſurface de l'eau, & il eſt obligé de ſe détourner continuellement de ſa premiere direction, avant même que d'être arrivé à la ſurface de l'eau ; c'eſt le phénomène de l'*inflexion de la lumière*.

Ce rayon ainſi briſé avant que d'entrer dans l'eau, continuera de le faire en entrant dans ce liquide, dont les parties ont plus d'attraction que l'air ; & c'eſt proprement ce qu'on nomme ſa *réfraction*. Il continuera de s'approcher de la perpendiculaire dans la ſubſtance de l'eau, juſqu'à ce que la profondeur de l'immerſion ſoit égale à la ſphère d'attraction des particules de l'eau ; car alors également attiré dans tous les ſens, il s'échapera en ligne droite par la tangente de la courbe qu'il a décrite dans ſa réfraction, & ſe mouvra avec toute la ſomme des accélé-

ſomme des accélérations qu'il a reçues.

En ſortant de l'eau, le rayon plus attiré par elle que par l'air, ne ſuit plus la ligne de ſon mouvement, il s'en écarte en prenant une direction qui s'approche plus de l'eau; il s'éloigne ainſi de la perpendiculaire tirée au lieu de l'émergence, juſqu'à ce que ſorti de la ſphère d'attraction de l'eau par la force de ſon mouvement tangentiel, il ſe meuve uniformément dans l'air en ligne droite.

D'où il ſuit en général que *la lumiére doit ſe briſer en s'approchant de la perpendiculaire, lorſqu'elle paſſe d'un milieu moins attirant dans un plus attirant; & en s'en éloignant dans ſon paſſage d'un lieu plus denſe ou plus attirant, dans un moins denſe ou moins attirant.*

Puiſque la lumiére en ſortant du verre pour entrer dans l'air, eſt forcée de courber ſon mouvement vers le verre par la plus grande force attractive de ce milieu, il s'enſuit que, ſi l'obliquité de l'émergence eſt telle que le rayon parvienne au ſommet de ſa courbe avant de ſortir de la ſphère d'attraction du verre, il ſera forcé de décrire l'autre branche de cette courbe, & de ſe porter ou réfléchir vers le verre; ce qui arrive lorſque l'angle

d'incidence a plus de quarante-un degrés.

Sous une moindre inclinaiſon, le rayon a plus de force perpendiculaire pour réſiſter à l'attraction, ſon mouvement ſe courbe moins, il ſort de la ſphère d'activité du verre avant que d'avoir atteint le ſommet de ſa courbe, ne retourne plus ſur ſes pas, mais s'échappe par la tangente au point où il commence à être hors de portée de la force attractive du verre.

Si au contraire l'eau touche la ſurface inférieure du verre, ce nouveau milieu n'a guéres moins d'attraction que le premier. La force qui retire le rayon vers le verre, n'étant que la différence des deux attractions, eſt plus foible qu'auparavant; ſous le même angle d'émergence, le rayon eſt moins courbé, il n'arrive plus au ſommet de ſa courbe, ne retourne plus vers le verre, & continue à pénétrer l'eau. La réflexion de ce rayon n'eſt donc jamais plus complette, que lorſque l'expérience ſe fait dans le vuide.

Puiſque la lumiére ne ſouffre réfraction, que parce qu'elle eſt attirée par le milieu le plus denſe, ſa viteſſe doit augmenter dans ce milieu; mais parce que la ſphère d'attraction eſt fort courte & déterminée dans le même milieu, elle

ſera la même, quelle que ſoit l'incidence, & la viteſſe de la lumiére ſera également augmentée, dans tous les cas, dans le même milieu. * Si l'on décompoſe le mouvement de la lumière en deux, l'un parallèle à la ſurface du nouveau milieu, de l'eau, par exemple, l'autre perpendiculaire à cette ſurface, il n'y aura que celle-ci qui ſera affectée par l'attraction, & celle-là demeurera la même dans l'eau & hors de l'eau. Soit donc c la viteſſe de la lumière dans l'air, 1 le ſinus total, on aura c. 1 :: la viteſſe horiſontale $= u$, eſt au ſinus d'incidence $= \frac{c}{u}$. Soit C la viteſſe de la lumiére dans l'eau, on aura C. 1 :: comme la viteſſe horiſontale qui eſt la même ou $= u$, eſt au ſinus de réfraction $= \frac{u}{C}$. Donc le ſinus d'incidence ſera au ſinus de réfraction :: $\frac{u}{c}$,

* Si l'incidence eſt oblique, que le rayon raſe pour ainſi-dire la ſurface refringente, ſa viteſſe perpendiculaire qui nait de la décompoſition, ſera nulle ; mais le rayon demeurera d'autant plus long-temps dans la ſphère d'attraction, & en ſera d'autant plus accéléré. Il pénétrera donc le nouveau milieu avec la même viteſſe perpendiculaire dans tous les cas ; donc conſervant auſſi dans tous les cas ſa même viteſſe horiſontale dans les deux milieux, le ſinus de refraction ſera toujours en rapport donné avec le ſinus d'incidence.

$\frac{n}{c}$ :: C. c, en raiſon conſtante, ou en raiſon inverſe des vîteſſes dans les deux milieux.

Mais parce que l'attraction dépend de la denſité des parties, les rapports du ſinus d'incidence & de réfraction ſeront différens dans différens lieux; c'eſt auſſi ce que l'expérience juſtifie. On a trouvé que dans le paſſage de la lumiére de l'air dans le verre, le ſinus de réfraction eſt à celui d'incidence, comme 2 à 3, & dans ſon paſſage de l'air dans l'eau comme 3 à 4.

Si donc la lumiére tombe de l'air dans l'eau ſous un angle d'à-peu-près 90°, l'angle de réfraction ſera de 48° $\frac{1}{2}$, afin d'avoir les ſinus dans la raiſon de 4 à 3. Si elle paſſe de l'eau dans l'air ſous l'angle d'émergence de 48° $\frac{1}{2}$, ſon angle de réfraction dans l'air ſera de 90°. Si donc l'angle d'émergence étoit plus grand que 48° $\frac{1}{2}$, il faudroit que le ſinus de réfraction fût plus grand que le ſinus total, ce qui eſt une abſurdité. Donc dans ce cas le rayon ne paſſera pas dans l'air, mais rentrera tout entier dans l'eau, comme nous l'avons ci-devant expliqué.

Ce rapport conſtant des ſinus de réfraction & d'incidence dans le même

milieu, ſuppoſant, ſelon Deſcartes même, une augmentation de viteſſe dans le milieu le plus denſe, eſt une démonſtration de l'attraction; car d'où pourroit venir d'ailleurs cette augmentation? Deſcartes ſuppoſe que la lumiére pénétre plus aiſément les milieux les plus denſes, ce qui n'eſt pas ſans difficulté; mais en l'accordant, cela ne ſera pas une augmentation réelle de viteſſe, comme il eſt néceſſaire ici, & tout ce que l'on pourroit en conclure, ce ſeroit que dans le milieu denſe, la viteſſe de la lumiére reſte la même qu'au moment de l'incidence; ce qui n'eſt pas ſuffiſant.

CLXXIV. Si un corps a naturellement moins de force attractive que l'air dont les molécules ſont très-denſes, mais ſéparées, ou ſi ayant même plus de force attractive que lui, il eſt entouré d'une athmoſphère plus ténue, moins attirante & répandue à une diſtance ſuffiſante de ſon corps central; alors ſi la lumière paſſe obliquement de l'air près de ce corps, ou dans cette athmoſphère, elle ſera pliée vers l'air, & décrira une courbe dont la convéxité ſera tournée vers le corps central; & ſi elle ſort de cette athmoſphère, avant d'avoir atteint le ſommet de ſa

courbe, elle s'échappera par une ligne très-divergente, augmentera l'ombre du corps central qui aura par-là une *apparence de répulsion*, comme Newton l'a observé sur un cheveu *.

Mais si l'athmosphère est plus ténue encore, ou plus étendue, de maniere que la lumiere ait atteint le sommet de sa courbe avant que d'être arrivée là où l'attraction du corps central est puissante, elle se réfléchira dans l'air sans avoir atteint les parties solides du corps opaque, & paroîtra le faire du sein du vuide & comme par une force répulsive, du côté même de l'incidence. Ce cas n'est qu'une extension du cas précédent.

Supposons, par exemple, qu'un corps solide attire plus le fluide dissolvant de l'air que l'air même ne l'attire, il se formera autour de ce corps solide plusieurs couches athmosphériques composées de ce fluide; mais l'attraction de ce corps central, diminuant par la distance, il y aura un point d'éloignement fort court,

* Les corps graisseux conservent leurs athmosphères dans l'eau; c'est pourquoi l'ombre du cheveu augmente même dans ce fluide. Cependant on pourroit attribuer cet effet à l'eau, qui attirant plus la lumiere que ne fait le cheveu, cause cette divarication des rayons, qui fait l'augmentation de l'ombre.

la derniere couche de ce fluide étant également attirée par l'air & par le corps central, sera dans une sorte d'état de stagnation. Cette couche sera nécessairement une couche physique, très-légère en elle-même, mais très-profonde relativement à un corpuscule de lumière; & par conséquent aux approches de cette limite physique, où il n'y a point d'attraction vers le corps central, la lumiére comprise encore dans la sphère d'activité de l'air, sera continuellement recourbée vers ce fluide, décrira une ligne convexe du côté du corps solide, & se réfléchira sur l'air. *

Les rayons même qui parviendront à la surface du corps opaque & qui la pénétreront, pourront être réfléchis, sans en toucher les parties solides. Les corps

* Le rayon perpendiculaire qui tombera sur cette surface, sera retardé par l'air qui l'attirera, non-seulement au point de contact de cette athmosphère, mais avant que d'y parvenir, le sera toujours de plus en plus à mesure que la couche d'air diminuera entre lui & l'athmosphère; de maniere que pénétrant la limite physique que nous avons supposée, il perdra tout son mouvement en avant pour être ensuite retiré en arriere par un mouvement accéléré qui sera d'autant plus grand, que la vitesse originaire de ce rayon étoit plus grande, & qu'il aura eu le temps de pénétrer plus avant, quoique toujours dans la sphère d'activité de l'air; ce qui sera l'effet de la répulsion.

plus compacts sont extrêmement poreux, & sont composés de lames transparentes. On peut donc les regarder comme de vastes cellules, séparées par des cloisons solides, entrecoupées elles-mêmes de pareilles cellules. La lumière qui tombe perpendiculairement sur la surface totale, pourra donc être oblique à des parties déterminées *a*, *b*, *c*, *d*, de cette premiere cloison ; le rayon qui tombera plus près de la partie *a* que de la partie *b*, pourra par-là être continuellement infléchi par cette partie, & courbé autour d'elle ; il pourra par conséquent parvenir au sommet de sa courbe au-dessous de la partie *a*, avant que d'être arrivé dans la sphère d'attraction vive de la seconde cloison, & dès-lors il remontera par la seconde branche de sa courbe de l'autre côté de *a*, ce qui fait la *réflection*.

Mais si les pores ou cellules de ce corps sont remplis d'une matiere également attractive, ou à peu-près, le rayon ne pourra plus parvenir au sommet de sa courbe (*n°. précéd.*) ; il sera transmis & le corps sera transparent ; c'est ainsi que le papier cesse d'être opaque quand il est imbibé d'huile. On peut donc regarder les corps comme également perméables à

la lumiére qui en effet est très-subtile, & déduire l'*opacité* de la raison que nous venons d'expliquer.

Dans d'autres circonstances où les cellules ne seront pas remplies d'un fluide également attractif, le rayon de lumiére pourra entrer dans la sphère d'activité de la seconde cloison, avant que d'être parvenu au sommet de sa courbe ; il se courbera autour d'une partie de cette cloison ensuite autour d'une autre partie d'une autre cloison, pourra se réfléchir, être obligé de se recourber en passant trop près d'une partie solide d'une cloison supérieure ; ce qui l'égarera quelque tems dans les pores : il en sortira enfin ; ce qui donnera le phénomène des *Phosphores* exposés au Soleil & portés dans une chambre obscure.

CLXXV. Les rayons qui portent en eux-mêmes les différentes couleurs dont la Nature se pare, ayant des vîtesses inégales, seront inégalement courbés par la même puissance sous la même incidence, & la lumiére se séparera en ses couleurs par la réfraction. Les sinus d'émersion seront toujours les mêmes pour la même couleur, dans le même milieu, différens dans différens milieux, différens

même dans le même milieu dans différentes couleurs. Nous avons vu en effet que la réfraction ne dépend point de l'angle d'incidence, mais uniquement de la vîtesse du rayon incident, de la Loi de l'attraction & de la densité des parties du milieu; ainsi le rayon rouge ayant plus de vîtesse, sera le moins réfrangible, le violet le sera le plus; & les sinus de leurs réfractions, seront l'un à l'autre en raison de 77 à 78, selon les expériences & le calcul de *Newton*. *

La réflection de la lumière se faisant par réfraction (*n°. précéd.*) sur les deux surfaces d'un corps opaque, les corps rouges seront ceux qui ayant le plus de force attractive, plieront trop les autres rayons & les obligeront de se coller & de s'éteindre contre leurs propres molécules; ne courbant les rayons rouges qu'autant qu'il faut pour parvenir aux sommets de leurs courbes, & se réfléchir.

Les corps violets au-contraire seront

* Le rayon rouge est moins accéléré que le violet dans sa réfraction, puisqu'il résiste plus, ou franchit plutôt l'espace d'attraction efficace; mais par cette raison il est aussi moins retardé dans son émergence; ce qui fait qu'il conserve la supériorité de sa vîtesse.

ceux qui n'auront que la force ſuffiſante pour courber les rayons violets autant qu'il le faut pour que la réfraction ſe change en réflection, & qui courbant moins les autres rayons plus forts, les laiſſeront paſſer & les tranſmettront, & ainſi des autres intermédiaires. *

Ce ſeroit la même choſe, ſi au lieu de faire dépendre la différence des couleurs de la différente vîteſſe des rayons, on la ſuppoſoit dans la groſſeur des particules de lumiére; car ſi nous conſidérons différens corpuſcules dans les limites de l'attraction, de manière qu'il n'y ait que leur ſurface antérieure qui y ſoit engagée, il eſt évident que les plus gros & les plus maſſifs ayant plus d'inertie, apporteront plus de réſiſtance à la cauſe qui tend à infléchir leur mouvement, & que les vîteſſes qu'ils recevront de l'attraction, ſeront réciproques à leurs maſſes. Ce ſera la même choſe, lorſqu'ils ſeront pleine-

* Par-là s'expliquent les expériences de Newton ſur la différente épaiſſeur des lames colorées, en ſuppoſant toutefois un mouvement d'oſcillation; c'eſt-à-dire, d'allongement & de contraction réciproques dans les particules de la lumiére, comme l'explique le P. Boſcovich dans ſa belle diſſertation ſur la lumiére, à laquelle nous renvoyons.

ment engagés dans la ſphère d'attraction. Car leur ſurface antérieure étant alors ſeule dans les limites d'un degré d'attraction plus fort, les plus gros recevront moins de vîteſſe de ce degré, & leur ſurface poſtérieure ſera engagée dans un degré moins puiſſant que la ſurface correſpondante des corpuſcules plus petits. Néanmoins, quoique la différence des couleurs puiſſe venir de-là, il eſt peu vraiſemblable qu'il y ait en tout temps & par-tout ſur la ſurface du Soleil un nombre fixe de particules de groſſeurs différentes & déterminées.

Quoique la ſurface des corps les plus petits ſoit hériſſée d'éminences & d'aſpérités que le microſcope découvre, il eſt néanmoins hors de doute qu'après les avoir polies, il y a beaucoup plus de parties étendues dans la direction de la ſurface totale, qu'auparavant. C'eſt même une expérience journalière, qu'un verre brut, & d'une ſurface inégale, renvoie la lumière avec une grande abondance du côté où il la réfléchira toute, ſi on vient à le polir; il a donc déja beaucoup de petites ſurfaces dirigées dans ce ſens-là, & il en acquiert un beaucoup plus grand nombre, lorſqu'on vient à le polir; & par

conſéquent ce ſera de ce côté qu'il réfléchira plus abondamment la lumière; ce qui ſuffit pour former une image. Il n'eſt donc nullement démontré que les parties ſolides des corps ne contribuent point à renvoyer la lumière. La force repouſſante qu'on ſuppoſeroit, formeroit dans ſes limites les mêmes inégalités qu'on veut éviter par elle.

Si donc les lames tranſparentes dont les corps ſont compoſés, ſont de différentes épaiſſeurs, elles auront différens tons d'élaſticité, & comprimées par la lumière, elles ſe rétabliront avec différentes forces & différentes vîteſſes; elles rendront par cela même différentes vîteſſes aux rayons de la lumière, ſelon leur degré de tenſion. Celles qui par leur reſſort leur rendront la vîteſſe qui fait le rouge, ſeront rouges; de manière que le blanc aura des particules élaſtiques de tous les degrés; au lieu que le noir n'aura point ou preſque point d'élaſticité. Voyez *Euler*, opuſc. p. 236.

CHAPITRE XIII.

Des effets de l'attraction dans le Phénomène des Tuyaux capillaires.

CLXXVI. DÈS qu'on présente un tuyau capillaire ouvert par les deux bouts, à la surface de l'eau, la portion de liqueur qui répond à son orifice, plus attirée par le premier anneau cylindrique de ce tuyau, que par la masse de l'eau, s'élève dans la capacité de ce tuyau, & remplit la concavité du premier anneau. Garni de cette lame de liqueur, ce premier anneau continue d'attirer l'eau inférieure, qui obéissant à cette force, s'élève & pousse dans le tuyau la lame qui en garnissoit le premier anneau. Celui-ci continue d'attirer, & l'eau continue de monter, jusqu'à ce que le poids de la colonne qui est dans le tuyau, égale la force de ce premier anneau, & fasse ainsi équilibre avec l'eau inférieure qu'il sollicite de monter.

Si l'on vient à retirer le tuyau, la

colonne de fluide qu'il contient, cherchera à descendre par son poids; mais la lame inférieure qui tomberoit la première, étant retenue par le premier anneau, je veux dire par l'anneau inférieur, & la force de cet anneau étant égale au poids de la colonne, celle-ci sera retenue dans le tuyau, & ne tombera point. Seulement la lame inférieure de l'eau fera contre le premier anneau une surface convexe, tandis que la lame supérieure fera autour de l'anneau supérieur une surface concave.

M. *Jurin* suppose que c'est l'anneau supérieur à la surface de l'eau élevée, qui soutient la colonne de liqueur; nous croyons que c'est l'anneau inférieur. Soit r le rayon d'activité de cet anneau supérieur, il attirera en haut une couche d'eau, dont l'épaisseur sera $= r$; mais cette couche r sera attirée en bas par l'anneau contigu, dont la force est égale à celle de l'anneau supérieur, & la couche r sera livrée à son poids.

Quand même la force attractive de l'anneau supérieur pourroit être efficace, elle ne le seroit que jusqu'où s'étend sa force d'activité, & ne passeroit pas l'épaisseur r de la couche qui lui est conti-

gue. Quelle force ſoutiendroit donc les autres couches ? Ce ne ſeroit pas les anneaux mouillés : on convient que leurs forces s'élident mutuellement, l'un tirant en-bas autant que l'autre tire en-haut. On ſuppoſe que ces couches adhérent l'une à l'autre par leur attraction propre, & que la couche ſupérieure étant ſoutenue par le premier anneau ſec, toutes le ſont par ſon moyen. Mais cet expédient ne vaut pas mieux que le premier. Suppoſez x le rayon de l'attraction de l'eau, & prenez dans la colonne élevée telle couche x qu'il vous plaira, autant elle ſera attirée vers le haut par l'eau qui lui eſt ſupérieure, autant le ſera-t-elle en bas par l'eau inférieure contigue.

C'eſt donc l'anneau inférieur qui ayant attiré toute l'eau, la ſoutient auſſi toute entière, & retient la lame convèxe qui veut tomber. Cette lame plus attirée vers les bords du tuyau qu'à de plus grandes diſtances de ces bords, s'y plie davantage, & obéit moins au poids ſupérieur qui la preſſe ; ce qui fait ſa convexité. Elle ne ſe rompt pas cependant, parce que ſes parties ſont retenues par leur propre attraction & par celle du verre ; que le poids de la colonne ne ſurpaſſe pas

une goutte, ainsi que MM. Mariotte & Bulfinger l'ont éprouvé, & n'excède pas par conséquent le poids que l'attraction de l'eau peut soutenir; *voy. n°.* 165. Si l'élévation de la liqueur dans le tuyau étoit dûe à la pression de l'air ou d'un autre fluide, la lame inférieure seroit concave, au lieu d'être convèxe. *V. M. Clairaut, figure de la terre.*

CLXXVII. Puisque c'est la force attractive du verre qui produit l'élévation & la suspension de l'eau, & que cette force subsiste dans le vuide comme dans l'air libre, la liqueur montera également dans le vuide & dans l'air : cet effet ne pourra au contraire s'exécuter dans l'air libre, si on l'empêche de sortir du tuyau, en fermant exactement son orifice supérieur : car alors l'air intérieur ne trouvant point d'issue, ne pourra faire place à l'eau, mais s'opposera par son poids, par son impénétrabilité, & par son ressort à l'élévation de ce fluide.

CLXXVIII. Le poids à élever augmentant à mesure que l'eau monte, la force qui élève demeurant au contraire toujours la même dans le même tuyau, *la vîtesse avec laquelle l'eau s'élève, d'abord très-rapide, diminuera continuelle-*

ment ; & il y aura dans chaque tube une hauteur déterminée que l'eau ne paſſera pas.

CLXXIX. *L'élévation de l'eau ceſſera, dès que ſa hauteur ſera en raiſon inverſe du diametre du tube.* Car, ſoit a la hauteur de l'eau, d le diametre du tuyau, le poids du cylindre de l'eau élevée ſera $= a d^2$; ſoit V la force attractive du verre, $V d$ ſera la force de l'anneau inférieur qui ſuſpend & qui élève : donc il y aura équilibre, & le fluide ceſſera de monter lorſqu'on aura $a d^2 = V d$; ou, en réduiſant cette équation à la lettre a, lorſque $a = \frac{V d}{d^2} = \frac{V}{d} = \frac{1}{d}$, à cauſe de la conſtante V ; c'eſt-à-dire, lorſque la hauteur du fluide ſera en raiſon inverſe du diamètre du tube. *

CLXXX. *La quantité de la liqueur ſuſpendue ſera au contraire directement proportionnelle au diamètre du tuyau.* Car la

* On a obſervé que l'eau chaude s'élève moins que l'eau froide dans le même tuyau. *Krafft. Prælect.* tom. 1, pag. 213 ; en effet l'attraction de l'eau chaude étant moindre que celle de l'eau froide, non-ſeulement ſon contact eſt moindre avec le verre ; mais la derniere lame d'eau étant moins attirée en-dedans par la colonne élevée, elle ne peut ſoutenir qu'une moindre quantité de ce fluide ; ce qui fait auſſi que l'eau chaude forme de moindres gouttes que l'eau froide.

quantité de l'eau étant comme ad^2, & a étant comme $\frac{1}{d}$, ad^2 est comme $\frac{d^2}{d}$, & par conséquent comme d. En effet, le poids de l'eau élevée doit être comme la force qui le soutient ; cette force, c'est l'attraction de l'anneau inférieur du tuyau, laquelle est proportionnelle à cet anneau, & par conséquent à son diamètre, qui est celui du tuyau, quand il est cylindrique, comme nous le supposons ici.

CLXXXI. *L'eau s'élevera néanmoins avec plus de rapidité dans les tuyaux étroits, que dans les plus larges.* Un tuyau étroit ayant plus de courbure, les parties qui composent son anneau inférieur, sont plus rentrantes ; & dès-lors un plus grand nombre de ces parties concourent à attirer une même molécule ; il a d'ailleurs moins d'eau à élever (n°. précéd) ; donc l'élévation de cette liqueur se fera avec plus de rapidité.

C'est un principe, que les petites quantités ont un plus grand rapport à leurs quarrés, que les grandes. 2 a un plus grand rapport à 4, que 3 à 9. Or, dans des tuyaux de différens diamètres, les forces attractives sont comme d & D;

& avant que l'élévation ſoit complette, les lames de fluide à élever, ſont comme *dd* à *D D*; donc, puiſque *d* eſt plus grand par rapport à *dd*, que *D* par rapport à *D D*, l'élévation ſucceſſive des lames ſe fera plus rapidement dans le premier cas que dans le ſecond.

CLXXXII. *Si l'on enduit de ſuif la ſurface intérieure d'un tuyau capillaire, & qu'on l'enfonce dans l'eau, cette liqueur ne montera point au-deſſus du niveau.* D'une part, la couche du ſuif exclut l'eau du contact immédiat avec le verre, & par-là même de l'endroit où l'attraction du verre eſt plus puiſſante : de l'autre, les corpuſcules forts & odorans que le ſuif exhale, détruiſent par leur choc ou par leur réſiſtance le reſte de l'effet de l'attraction du verre; & l'eau doit ſe mettre de niveau avec l'extérieure, comme ſi le tuyau n'étoit pas capillaire.

CLXXXIII. *Si l'eau eſt ſuſpendue dans un tuyau long, & qu'on le renverſe, la liqueur tombera juſqu'au bout inférieur, & y demeurera ſuſpendue; ſi la partie ſupérieure avoit été enduite de ſuif, l'eau ne deſcendra pas, en renverſant le tuyau.* Dans le premier cas, l'attraction de l'anneau inférieur contigu à la liqueur, ſe

joindra à ſon poids pour la faire deſcendre, & elle obéira à ces deux forces. Parvenue à l'orifice, ſi elle continuoit à tomber, elle ſeroit attirée par l'anneau inférieur, dont la force eſt égale à ſon poids, & dont elle ſe ſépareroit par l'écoulement : donc elle ne pourra s'écouler.

Dans le ſecond cas, la partie qui eſt devenue inférieure par le renverſement du tuyau, étant enduite de ſuif, l'anneau inférieur à l'eau, n'exerce plus efficacement ſa force attractive (n°. précéd.); donc le poids de l'eau eſt ſoutenu par l'anneau inférieur immédiatement au-deſſus de la partie enduite ; & il en eſt dans ce cas, comme ſi la partie enduite étoit rompue & ſéparée du reſte du tuyau.

CLXXXIV. *Si l'eau eſt élevée dans un tuyau large, & qu'on préſente à l'orifice de ce tuyau, un tuyau plus étroit qui touche l'eau, celle ci abandonnera le tuyau large, & s'élevera dans le plus étroit.* 1°. Nous avons vu que les parties d'un tuyau étant plus rentrantes, plus de parties exercent leurs forces ſur une même molécule ; donc, quoique la force totale & abſolue du tuyau large ſoit plus grande, ſa force reſpective eſt moindre & moins

concentrée par rapport à chaque molécule ; donc celle-ci obéira à la plus grande force respective sur elle, & s'élevera dans le tuyau étroit. 2°. Le tuyau étroit enfoncé dans un tuyau large, attire de plus près l'eau qui répond à son orifice ; que cette eau n'est attirée par les parties du tuyau large dont elle est plus distante ; donc elle est plus attirée à raison de cette proximité, & doit s'élever dans le tuyau étroit. 3°. L'eau s'élevant dans le tuyau étroit, sa partie inférieure est attirée en-bas par l'anneau inférieur du tuyau large ; mais elle est aussi attirée en-haut par les anneaux supérieurs de ce tuyau large ; donc elle doit suivre par sa propre attraction celle qui monte dans le tuyau étroit. *Voyez n°.* 165.

CLXXXV. *Si un tuyau capillaire est surmonté d'une partie plus étroite, & qu'on enfonce ce tuyau dans l'eau, il y a trois cas ; si on enfonce la partie large, & que l'eau n'arrive pas à la partie étroite, l'eau s'élève à une hauteur proportionnée au diamètre de cette partie large : Si l'eau arrive jusqu'à la partie étroite, toute la hauteur de l'eau au-dessus du niveau, est proportionnée au diamètre du tuyau étroit ; & la masse*

de l'eau élevée est plus grande que si le tuyau étoit étroit dans toute la hauteur que l'eau occupe : si l'on enfonce la partie étroite, & que l'eau pénètre jusqu'à la plus large, l'eau ne s'élèvera qu'à une hauteur dûe au diamètre de cette partie large, & la masse d'eau soutenue sera moindre que si le tuyau étoit par-tout uniforme & de même diamètre que sa partie large.

PREMIER CAS. Lorsqu'on enfonce la partie large, & qu'on ne le fasse pas pour que l'eau arrive au tuyau étroit, ce tuyau est, par rapport à l'eau élevée, comme s'il n'existoit pas. Sa sphère d'activité trop courte n'arrivant pas jusqu'à l'eau, tout doit se passer comme si le tuyau étoit par-tout de sa grande largeur.

SECOND CAS. Si l'on plonge la partie étroite, & que l'eau entre dans la partie large, il y aura moins d'eau soutenue, que si la partie large étoit uniforme dans toute la profondeur de l'eau; mais il y aura le même poids à soutenir. La partie étroite attirant plus vivement par sa courbure rentrante, les molécules d'eau entrées dans la partie large, augmente leur poids vers le bas; & par conséquent la partie large n'en peut soutenir autant qu'à l'ordinaire, ni le bout inférieur de

la

la partie étroite, ſoutenir l'eau à la même hauteur, que ſi cette partie étroite regnoit dans toute la longueur du tube. D'une part, l'eau ſupérieure ſollicitée à rentrer dans la partie étroite, tend à y prendre une vîteſſe réciproque à la ſection de cette partie, & a par conſéquent vers le bas la même quantité de tendance, que ſi plus d'eau ſe trouvoit ſuſpendue dans cette partie étroite, en raiſon du diamètre de la branche large, ce qui tiendra l'eau dans la branche large à la même hauteur, que ſi le tuyau étoit partout de la même largeur : d'autre part, le bout inférieur du tuyau étroit, qui ſoutiendroit l'eau à une plus grande hauteur, ſe trouve chargé d'un plus grand poids par l'eau contenue dans la branche large ; & par conſéquent ne peut plus élever l'eau à une ſi grande hauteur.

TROISIÈME CAS. Quand on plonge la partie large ſurmontée d'un tuyau étroit, à l'aide d'une calotte ſphérique qui les joint, ſi l'eau vient à toucher la partie étroite, cette partie attire l'eau de la partie large avec une vîteſſe réciproque à ſon diamètre ; elle diminue donc le poids de l'eau contenue dans la partie large, d'une quantité égale au produit du diamètre de

cette partie large multipliée par l'excès de la hauteur de l'eau, dûe au diamètre de la partie étroite; & par conséquent l'anneau inférieur de la partie large est en état de soutenir le reste du poids de l'eau, & de retenir cette liqueur, si elle commençoit à s'écouler.

Supposons que la partie étroite n'ait qu'une hauteur égale au rayon de l'activité du verre, alors le poids de l'eau contenue dans la partie large à une hauteur dûe au diamètre de la partie étroite, sera au poids de l'eau qui seroit contenue dans la partie large, si elle étoit seule, comme D à *d*, ou, comme le diamètre de la partie large, au diamètre de la partie étroite. Donc la partie étroite attirant l'eau qui lui est contigue, dans la partie large, & la sollicitant avec une vîtesse réciproque à son diamètre, & par conséquent proportionnelle au diamètre de la partie large, diminue son poids en même raison qu'elle en augmente la hauteur; & par conséquent le poids de cette grande colonne est le même vers le bas, que celui d'une colonne moindre proportionnée au diamètre de la partie large, & l'anneau inférieur de cette partie peut dès lors le soutenir.

CLXXXVI. *Si la partie large a plusieurs pouces de diamètre, & finit en capillaire, de manière que la hauteur de l'entonnoir ne surpasse pas la longueur de la colonne que soutiendroit un tube par-tout de la même capacité, que l'extrémité capillaire, toute cette masse d'eau demeurera suspendue dans l'entonnoir, si elle vient à toucher l'extrémité capillaire, même dans le vuide de la machine pneumatique.* Car l'extrémité capillaire attirant l'eau, elle la soutient contre l'effort du fluide subtil qui reste encore dans le Récipient, & qui y est le véhicule de la chaleur. Tout le reste de l'entonnoir, & sur-tout sa partie convèxe, attirant de même ce fluide, mais seulement perpendiculairement à sa surface, le colle fortement contre ses parois, & l'y soutient contre le fluide subtil qui cherche à entrer dans les pores du verre. Ce fluide subtil n'a donc d'action libre que sur l'eau de la cuvette ou sur la base de l'entonnoir; & dès-lors il est en état de soutenir cette grande quantité d'eau.

Mais si la hauteur de l'entonnoir surpasse la longueur de la colonne qui seroit soutenue par un tube par-tout de la même capacité que l'extrémité capillaire,

alors la colonne centrale, trop pesante pour être soutenue par la partie étroite, baissera par son propre poids, l'air ou le fluide subtil qui cause son ressort, pénétrera dans l'entonnoir, s'appuyera contre sa partie convèxe, détruira la pression qui s'exerce sur le gobelet, & toute l'eau tombera par son poids. C'est donc ainsi que l'attraction seule ne suffit pas, mais est nécessaire pour cet effet.

Plusieurs Physiciens ont pensé que l'attraction seule est suffisante pour expliquer ce phénomène. Il est le même, selon eux, que celui du vif-argent purgé d'air, qui se soutient même dans le vuide à la hauteur de 70 & de 75 pouces dans le tube de *Toricelli*. Selon eux, tous les corps tombent avec la même vîtesse dans la machine du vuide, quelle que soit la différence de leurs surfaces, relativement à leurs masses; c'est une preuve qu'il n'y a point de résistance ni de fluide assez dense pour produire un effet que l'air même ne peut produire. Ils pensent que le vif-argent purgé d'air, ayant ses parties plus rapprochées, elles s'appliquent plus immédiatement contre le verre, & se soutiennent mutuellement davantage par leurs irrégularités, de manière que ses couches

ſont comme autant d'arcs fortement appuyés contre le verre, à cauſe de ſes inégalités, & qui ſe ſoutiennent dans cette poſition par leurs parties entrelacées, à la manière des clefs d'une voûte; d'où il arrive que ſi on ſecoue le tube, même fort légèrement, le tout croule & ſe précipite; & l'on voit le mercure former, en ſe précipitant, une ſurface concave contre les parois du tube, en preuve de ſon adhérence. Le mercure, ſelon eux, ne différe alors que du plus au moins d'autant de parties de ſable qui ſe ſoutiendroient plus fortement dans le tuyau.

Il en eſt de même de l'expérience précédente. Pour qu'elle réuſſiſſe dans le vuide, il faut que l'eau ait été purgée d'air, parce qu'alors ſes parties ſe touchant plus intimement, & par de plus grandes ſurfaces, s'uniſſent en plus grand nombre & plus fortement avec le verre, ſont dès-lors plus ſoutenues par ſa force attractive & par leurs inégalités qui forment des entrelacemens & des ſoutiens; & quoique les Académiciens de Florence aient trouvé l'eau incompreſſible, ce n'eſt cependant que ſenſiblement. L'air qui y eſt mêlé ne peut que très-peu en écarter les parties; mais ce peu fait beaucoup pour

l'entrelacement, & pour une attraction immense au contact.

CLXXXVII. *Si l'on remplit un siphon composé de branches de longueurs inégales, & qu'on plonge la branche la plus courte dans le gobelet, l'eau, quels que soient les diamètres, s'écoulera goutte à goutte par la plus longue.* L'eau devroit sortir alors d'un plein jet, comme dans les siphons ordinaires; mais retenue à l'orifice par une force intérieure qui s'oppose à son écoulement, sa vîtesse est retardée, ne surmonte qu'avec peine, par l'excès de son poids, l'attraction de l'anneau inférieur dont elle se sépare, ne s'échappe ainsi qu'avec lenteur; & se trouvant attirée par le plan du verre & par la surface extérieure, elle lui cède, se porte en-dehors un peu au-dessous de l'orifice, pour y former une goutte qui croît & s'augmente à tous momens, jusqu'à ce que trop grosse pour être soutenue, elle vienne à se précipiter.

CLXXXVIII. *Si l'on retire la branche plongée, l'eau continue de s'écouler, si la différence des branches surpasse la hauteur où elle s'éleveroit dans la plus courte, mais demeure en repos dans le siphon, lorsque cette différence n'excède pas cette hauteur.*

Dans le premier cas, la quantité d'eau excédant celle qu'un tuyau de ce diamètre peut ſoutenir, il eſt néceſſaire que livrée à l'excès de ſon poids, elle s'écoule: mais elle eſt ſoutenue dans le ſecond; parce que le diamètre eſt tel, que la force attractive égale ou ſurpaſſe le ſurplus de l'eau contenue dans la différence des branches.

Si l'eau s'écouloit par la plus longue, il faudroit qu'elle s'élevât dans la plus courte; or cela eſt impoſſible. L'anneau inférieur de cette branche, retire à lui l'eau qui tend à monter; la force qui ſollicite à monter, eſt égale au poids de la différence des branches; & ce poids, par la ſuppoſition, eſt égal à la force attractive de l'anneau inférieur de la branche la plus courte; donc, en derniere analyſe, la force qui retient l'eau à l'extrémité de la branche la plus courte, eſt égale à celle qui la ſollicite à monter; & il y a équilibre, par conſéquent point d'écoulement.

Mais cet équilibre eſt impoſſible, dès que le poids de l'eau ou la différence des branches ſurpaſſe la force de l'anneau inférieur de la branche la plus courte, ou même dès que l'on plonge celle-ci dans

la cuvette ; car alors, quelle que ſoit la différence des branches, autant l'anneau inférieur de la plus courte retient l'eau qui tend à monter ; autant attire-t-il à lui l'eau de la cuvette qui pouſſe par conſéquent, & fait monter l'eau qui remplit la capacité de cet anneau. Tout doit donc ſe paſſer alors comme dans les ſiphons ordinaires, ſans autre différence de la part de l'eau, que de s'écouler goutte à goutte.

Il paroît d'abord difficile de concevoir comment la périphérie de la jambe la plus courte, peut retenir l'eau contenue dans la différence des branches, vû que cette eau n'eſt point compriſe dans la ſphère d'activité de cette périphérie ; mais en y faiſant attention, cette difficulté s'évanouit. Si c'eſt la branche la plus large qui eſt la plus longue, la branche la plus étroite au point de la jonction des deux branches, attire à elle l'eau de la grande branche, & la diminue proportionnellement de poids ; donc, quoique cette grande branche ſoutienne alors plus d'eau qu'elle n'en peut naturellement ſoutenir, elle ne ſoutient pas un plus grand poids qu'à l'ordinaire, lorſque la difference des branches ne ſurpaſſe pas la

hauteur dûe à la branche la plus courte, & la force de son anneau inférieur suffit pour cela.

Si c'est la jambe la plus étroite qui est la plus longue, attirant à elle l'eau de la branche la plus large, là où se fait la jonction, elle se charge d'une partie de son poids; & quoique la différence des branches soit moindre que l'élévation dûe au diamètre de cette jambe plus étroite, son anneau inférieur soutient un égal poids, lorsque la différence des branches est égale à l'élévation qui se feroit dans la jambe la plus courte & la plus large.

CLXXXIX. *Si le siphon étant rempli, on plonge dans la cuvette la branche la plus longue, l'eau coulera dans la cuvette par cette branche, si la différence des branches surpasse l'élévation dûe au diamètre de la jambe la plus courte : dans tout autre cas, il n'y aura point d'écoulement.*

Quand la surcharge est plus grande que la hauteur à laquelle la branche la plus courte peut élever l'eau, il n'y a rien qui la soutienne dans la grande branche, & elle doit couler. Il en est alors de cette branche, comme d'un tuyau simple dans lequel on a introduit plus d'eau qu'il n'en

peut ſoutenir ; non-ſeulement ce ſurplus s'écoule à l'air libre, mais lors même qu'on plonge le tuyau : or, dans un ſiphon, dès qu'une fois l'eau a commencé de couler, elle le doit faire toujours, parce que la différence des branches augmente continuellement par l'écoulement.

En effet, la branche la plus longue & la plus étroite, non-ſeulement eſt chargée du ſurplus de l'eau contenue dans la différence des branches ; mais au lieu de la jonction, elle ſe charge encore d'une partie du poids de la branche la plus courte ; il y auroit équilibre, ſi la différence des branches égaloit la hauteur dûe à la branche la plus courte, parce que le poids de la branche large dont elle ſe chargeroit, tiendroit lieu de la plus grande quantité d'eau que le diamètre de cette différence des branches pourroit ſoutenir : donc, puiſque la différence des branches ſurpaſſe cette hauteur, elle eſt ſurchargée, & l'eau s'écoule.

Mais lorſque la ſurcharge de la branche plongée, égale la hauteur où l'eau pourroit s'élever dans la branche la plus courte, ſi l'eau couloit dans cette branche plongée, il faudroit qu'elle ſe ſéparât de l'anneau inférieur de la branche la

plus courte : or cela ne peut être. Cet anneau pouvant ſoutenir autant d'eau qu'il y en a dans la ſurcharge ; & cette ſurcharge pouvant ſeule être la cauſe que l'eau ſe ſéparât de la circonférence annulaire de la branche la plus courte, il faudroit qu'une force égale vainquît une autre force égale ; ce qui eſt une contradiction. *Voyez le n° précédent.*

CXC. Tels ſont à-peu-près les phénomènes que préſentent les tuyaux capillaires, à raiſon de leurs formes & de leurs capacités ; mais la qualité de la matière même des tuyaux, celle des liqueurs où on les plonge, peuvent ſe combiner pour offrir de nouvelles variétés. Différens verres peuvent avoir différentes denſités, & dès-lors attirer diverſement, ou, ce qui eſt le même, élever la même liqueur à différentes hauteurs. Ils peuvent être revêtus de différentes athmoſphères plus ou moins perméables à différentes liqueurs, & dès-lors varier les rapports d'élévation de ces différentes liqueurs plus ou moins repouſſantes par leur reſſort, par la différence des oſcillations qu'y excite la chaleur, ou tout ce qui cherche à les pénétrer, & dès lors capables de varier les rapports de ſuſpenſion, lorſque l'éléva-

tion ſe feroit par l'introduction forcée de ces différentes liqueurs : au ſurplus, nous ne croyons pas que ces différences tirées de la diverſité des matières dont le verre eſt composé, puiſſent aller juſqu'à élever au-deſſus de la hauteur de l'eau dans le même tube, une liqueur qui ſe tiendroit au-deſſous d'elle dans un autre tuyau. Si quelques Auteurs ont paru l'inſinuer, des Auteurs également habiles ont publié des réſultats différens ; & dans ce genre la délicateſſe des opérations, la différence inévitable dans le manuel de divers Opérateurs, peuvent cauſer bien des variétés qu'on auroit tort de rejeter ſur la Cauſe.

CXCI. *Les parties du mercure s'attirant plus entr'elles, qu'elles ne ſont attirées par le verre, il doit arriver conſtamment, ſi l'on plonge un tuyau capillaire dans du mercure, qu'il ne monte pas juſqu'au niveau avec les colonnes extérieures.* Car alors il faut concevoir au-deſſous du tuyau un canal de mercure de même diamètre, comme ſi c'étoit le même tuyau prolongé & composé de ces différentes matières ; & le mercure qui monte par l'action des colonnes latérales, ne pourra le faire qu'en s'arrachant à la ſurface intérieure de ce

canal mercuriel, placé à l'orifice du tube.

La partie qui monte, eſt donc alors affectée de quatre forces différentes : elle eſt ſollicitée à monter par l'action des colonnes latérales, & par l'attraction annullaire du verre ; elle eſt tirée en-bas par ſon poids & par l'attraction de l'anneau mercuriel dont elle ſe ſépare. Or, de ces forces contraires, deux ſont égales, ſçavoir, le poids de la colonne qui monte, & l'action des colonnes latérales ; & à cet égard le mercure devroit monter dans le tube juſqu'au niveau ; mais l'attraction du canal de mercure étant plus forte que celle du verre, elle fait un excès de poids qui ſurcharge les colonnes latérales, & les empêche d'avoir tout leur effet. Il doit donc y avoir un défaut de niveau proportionné à cette plus grande force attractive du mercure. Soit a ce défaut de niveau, d le diamètre du tube, ad^2 ſera le poids du cylindre qui manque pour faire le niveau, ſoit v l'attraction du mercure, u celle du verre, $\overline{v-u}\times d$ ſera l'attraction de l'anneau mercuriel qui tire en-bas ; donc il y aura équilibre, lorſqu'on aura $ad^2 = \overline{v-u}\times d$; ce qui donne $a = \frac{\overline{v-u}\times d}{d^2} = \frac{v-u}{d}$; & à cauſe de la conſ-

tante $v - u$, $a = \frac{1}{d}$; c'eſt à-dire, que le *défaut de niveau ſera en raiſon inverſe du diamètre du tube.*

CXCII. On obſerve pareillement que *l'eſprit de vin, quoique plus leger que l'eau, ne monte pas ſi haut qu'elle dans les tuyaux capillaires ; & il en eſt de même de pluſieurs autres liqueurs ſpécifiquement plus légères.*

Ce phénomène, qui renverſe toutes les théories tirées du méchaniſme ordinaire, eſt une ſuite de la nature de l'eſprit-de-vin & de l'attraction.

L'eſprit-de-vin, ſelon les Chymiſtes, n'eſt qu'un phlegme impregné d'huile & de ſel. Le ſel, en général, eſt plus peſant que l'eau. Il faut donc que la plus grande légèreté ſpécifique de l'eſprit de-vin, vienne de la plus grande rareté & de la plus grande poroſité des parties d'huile & de phlegme qui s'uniſſent au ſel, qui l'entourent & l'enveloppent comme une athmoſphère, au centre de laquelle il eſt comme enſeveli. Par-là le ſel qui fait partie de l'eſprit-de-vin, & qui eſt plus peſant que l'eau, ſe trouve plus écarté du contact avec le verre, & dès-lors néceſſairement placé à une diſtance où l'attraction du verre eſt plus foible & moins puiſſante.

Or il doit arriver de-là que l'esprit-de-vin, malgré sa plus grande légèreté spécifique, s'élève moins que l'eau; d'abord l'huile & le phlegme qui composent l'esprit-de-vin, touchent le verre d'aussi près que l'eau, à moins qu'on ne leur suppose des athmosphères qui les écartent, ce qui est peu vraisemblable; mais comme ce composé est plus poreux que l'eau, il a, sous volume égal, moins de parties en contact, & est moins attiré. Par la même raison, dans le reste de la sphère d'activité du verre, il présente, sous pareil volume, moins de parties à attirer; & à cet égard, l'élévation de l'esprit-de-vin devroit se faire avec une égale vîtesse & à même hauteur que celle de l'eau. Car c'est un principe, que l'attraction pénétrant les masses, elle donne à toutes, aux plus denses & aux plus rares, une égale vîtesse; mais il est évident aussi que la force ou le *moment* de ces parties d'huile & de phlegme sera, sous même volume & vîtesse égale, d'autant moindre en rapport à celle de l'eau, que ce composé est moins dense & plus léger. Donc, puisque les parties de sel sont portées par l'huile & le phlegme qui les enveloppent, hors de la sphère d'activité

vive du verre ; qu'il n'y a que des degrés lents & foibles d'attraction qui les saisissent à cette distance ; que ces parties de sel sont plus pesantes sous un même volume, que les parties d'eau qui se trouvent dans le même éloignement du contact, il doit arriver que les parties d'huile & de phlegme qui sont en contact, & qui ont moins de force sous même vîtesse dans leur élévation, que n'en ont les parties d'eau en contact, éprouvent dans la plus grande pesanteur de leurs sels plus de résistance à leur élévation, que les parties d'eau n'en éprouvent par l'entraînement qu'elles doivent faire des parties d'eau plus éloignées & moins attirées : d'où il suit que ce défaut de force, combiné avec cette plus grande résistance, doit porter l'esprit-de-vin à une moindre hauteur, malgré sa plus grande légèreté totale.

Il est vrai que les corpuscules de sel, écartés au delà du rayon d'activité du verre, tendent à monter avec autant de vîtesse que les parties d'eau qui sont à la même distance du contact ; mais cette vîtesse de l'eau & du sel à cette distance, est beaucoup moindre que celle de l'eau & du phlegme qui sont en contact & très-près

près du contact : donc il faut que ces dernières parties d'eau & de phlegme, qui tendent à s'élever plus promptement, entraînent respectivement leur eau & leur sel sollicités & mûs avec plus de lenteur, & qu'elles perdent de leur vîtesse à proportion : donc le phlegme impregné d'huile, ayant déja moins de force que l'eau sous même vîtesse, & ayant à soulever des corpuscules plus massifs, trouve plus de résistance dans son élévation, & doit par cela même s'élever moins.

Si une liqueur, au contraire, est homogène & plus légère que l'eau, elle pourra, par la seule configuration de ses parties, s'élever moins encore que ce fluide. Supposons, par exemple, que les pores de l'eau & de cette liqueur, soient en raison donnée, plus grands dans la liqueur que dans l'eau, mais que les pores de l'eau aillent en se rétrécissant depuis le centre de chaque globule, jusqu'à sa surface, & que ceux de la liqueur aillent au contraire en s'élargissant depuis le centre jusqu'à la surface : la porosité totale sera en raison donnée ; mais le défaut de contact entre le verre & la liqueur sera en plus grande raison que la porosité. Or, l'attraction est immense au con-

tact en comparaison de ce qu'elle est à la moindre distance finie ; & elle est proportionnelle à la quantité du contact : donc chaque globule de la liqueur ayant moins de contact avec le verre, que n'en a chaque globule d'eau, il en est moins attiré ; & le défaut de contact dans cette liqueur, surpassant l'excès de porosité, le défaut d'attraction ou de force élevante, excède le défaut de résistance & de pesanteur ; & par conséquent la liqueur est moins élevée, malgré sa plus grande légèreté.

On voit par-là que la différente configuration des fluides contribue beaucoup à leur élévation, & qu'il faudroit connoître bien à fond leur nature, pour prévoir la hauteur où chacun d'eux doit s'élever. Les différens fluides sont composés de parties *aqueuses*, *ignées*, *aériennes*, *terrestres* & *salines*, non-seulement en différentes proportions, mais encore en différentes combinaisons ; d'où doivent résulter différentes quantités de contact sous le même poids ; ce qui doit produire des élévations fort inégales, & nullement relatives aux poids (*a*).

(*a*) Trois Elémens concourent au phénomène des tuyaux capillaires : 1°. l'adhésion des *unités* de la liqueur

En général, *les ſubſtances de même genre s'attirent ordinairement plus que des ſubſtances hétérogènes;* ce qui vient de la quantité du contact, plus grande entre les premières qu'entre les ſecondes. Les ſubſtances homogènes ayant même configuration, doivent avoir à-peu-près leurs pores de la même grandeur, en même nombre & peut-être de la même figure; d'où il doit toujours arriver, en prenant les choſes en total, que le plus grand

entr'elles; 2°. l'adhéſion des *unités* de la liqueur aux *unités* dont la matière du tuyau eſt formée; 3°. la gravité ſpécifique de la liqueur. Ce dernier y entre comme réſiſtance à vaincre; les deux premiers comme cauſes actives; & c'eſt de la combinaiſon du tout que dépend l'élévation. Or on ſçait que les inégalités d'adhérence des différens corps ne ſont pas proportionnelles à leurs gravités ſpécifiques; & l'on voit bien que cela doit être. La gravité ſpécifique dépend de la quantité de matière, & par conſéquent de la denſité des molécules & de la denſité du tout; l'adhérence dépend de la quantité du contact, & par conſéquent de la forme & de la denſité des élémens ou unités, qui diffère fort de la denſité intégrale; ce qui montre bien clairement que la hauteur de l'élévation ne doit pas toujours répondre à la gravité ſpécifique. Voilà juſqu'où nous pouvons aller. Nous ne connoiſſons pas aſſez la texture pour déterminer l'adhérence & l'élévation qui lui eſt dûe: c'eſt plutôt par les degrés d'élévation que nous devons rechercher les différences d'adhérence, qui même ne nous éclaireront que fort peu ſur la texture intime, mille combinaiſons différentes pouvant donner le même réſultat; ainſi ce que nous venons de ſuppoſer ne doit être pris que comme exemple.

nombre des pores doit répondre aux pores, lorsqu'elles se joignent, & le plus grand nombre des parties solides aux parties solides ; ce qui fait une très-grande étendue de contact ; au lieu que dans les substances hétérogènes qui dans leur tout, ou dans leurs parties, ont moins de similitude, le plus grand nombre des pores doit communément répondre aux parties solides, & réciproquement ; ce qui diminue la quantité de contact, & par conséquent l'attraction là où elle est la plus vive & la plus puissante ; ce qui même place les autres parties plus distantes moins directement sous les parties solides du corps attirant, & par cette direction oblique, diminue d'autant le degré d'attraction auquel elles sont soumises.

Or l'on sçait que les esprits urineux, les liqueurs ammoniacales, tiennent beaucoup plus de la matière qui compose le verre, que l'eau & les esprits ardens ; & par conséquent ils doivent s'élever beaucoup plus haut, malgré leur plus grande pesanteur : en effet, l'attraction pénétrant les masses, la densité totale des liqueurs, ou leur pesanteur, n'est point un obstacle à la vîtesse de leur pénétra-

tion, hors certains cas particuliers; & c'eſt uniquement la quantité de contact qui en décide : donc les ſubſtances ſimilaires ſe touchant toujours par un contact plus vrai, plus ſolide & plus étendu, les ſubſtances ammoniacales doivent, malgré leur poids, s'élever le plus haut dans les tuyaux capillaires; & cette quantité d'élévation pourra même varier, ſelon la matière dont le verre ſera compoſé.

CXCIII. C'eſt ainſi que l'attraction, après nous avoir donné le mécaniſme des Cieux, peut nous fournir encore la cauſe & l'explication de la plûpart des phénomènes ſublunaires qui ſuppoſent une force qui n'agit qu'à de très-petites diſtances. Il faut réunir tous ces phénomènes pour en trouver la véritable loi, puiſque ce ſont les phénomènes qui l'ont fait découvrir. Les phénomènes aſtronomiques nous indiquent qu'à ces diſtances elle agit en raiſon inverſe du quarré, & n'indiquent rien de plus : les phénomènes de la Chymie nous montrent qu'à de petites diſtances elle agit dans une raiſon plus grande que l'inverſe du quarré : donc combinant ces effets, on doit conclure qu'elle agit ſelon une loi mixte, propre

à ne montrer que la raiſon du quarré à de grandes diſtances, & à faire prévaloir la raiſon plus grande à des diſtances très-petites. Or nous avons vu qu'il peut y avoir une telle loi : elle doit donc être regardée comme loi originaire, primitive & univerſelle de tous les grains de la matière, laquelle ſe combinant différemment ſelon la différence des obſtacles, fait avec l'impulſion le reſſort général & univerſel de la Nature, qui donne une proviſion inépuiſable de forces, propre à réparer les pertes que l'impulſion & le choc font faire à tous momens. En vain a-t-on voulu incidenter ſur la nature de cette force. Le mouvement dans ſa nature & dans ſa communication ne peut être d'un autre genre ; & quiconque connoît bien les difficultés que renferme le choc, ne ſera point tenté de ſe décider ſur celles que peut ſouffrir l'attraction. Par la nature & la néceſſité de ſon être, le choc ne dépend pas plus de la quantité de matière, que du volume, de la couleur ou de la figure. Il n'a de vertu qu'autant que le Créateur a voulu lui en donner. Il en eſt de même de l'attraction. Un fait où elle n'eſt pas ſenſible, ne prouve rien ; parce que mille obſ-

tacles peuvent en ſuſpendre l'effet. Un fait qui la contient, la démontre ; & combien n'en avons-nous pas vu de ce genre ? Or, dès que rien n'empêche de la regarder comme une loi primitive, ſuppoſer qu'elle en eſt une, c'eſt prétendre que l'Auteur de la nature viſe en tout à l'épargne ; car, quelle immenſe & quelle inutile quantité de mouvemens & de reſſorts ne faudroit-il pas employer pour l'expliquer & pour la réduire, ſi même cela étoit poſſible à la qualité d'effet ?

Eclairciſſement ſur la force perturbatrice de la Lune.

Pour reprendre de ſuite, & démontrer plus rigoureuſement ce que nous avons établi ſur la force perturbatrice de la Lune (nos 89, 90, 91 & 107), ſoit ce Satellite (fig. 27) en un point quelconque L de ſon orbite, ſe mouvant de L en Q, il ſera attiré par le ſoleil S avec une force qui ſera à celle avec laquelle cet aſtre attire la terre, comme ST^2 à SL^2. Par le ſoleil S tirez la droite LG qui ſoit à TS, comme TS^2 à SL^2,

& L G repréſentera la peſanteur de la lune ſur le ſoleil.

Cette force étant oblique, fera ſur la lune le même effet que les deux forces L H & L R, qui forment deux côtés du parallélogramme, dont L G eſt la diagonale. L H étant égale & parallèle à T S, qui exprime la peſanteur de la terre ſur le ſoleil, ſoutiendra la lune dans ſon cours annuel, ſans troubler le mouvement de ſon mois autour de la terre, & L R ſera la *force perturbatrice* de la lune. Si S G étoit nulle, R G ſeroit couchée ſur S O, & L R ſeroit L O. Or S G eſt comme nulle par rapport à S T, à cauſe de la grande diſtance du ſoleil. L'angle T S Q, le plus grand de tous, n'étant que la ſixiéme partie d'un degré ou de 10', on voit bien que la différence des angles L S O, L G R doit être inſenſible, & que R G doit ſe confondre ſenſiblement avec ſa parallèle S O, d'autant que cette erreur, toute petite qu'elle eſt, ſe trouve corrigée par une erreur contraire, quand la lune eſt en K. On peut donc conſidérer le point R confondu avec le point O, & L O ſera la *force perturbatrice*.

Puiſque L H = T S, ſon extrémité H dans une grande partie de l'orbe de la lune, deſcend au-deſſous du centre du ſoleil, & L O ſe trouve oblique au mouvement de la lune; & à ſa peſanteur ſur la terre dirigée par L T; par conſéquent elle fait l'effet des deux forces L B, L F, dans leſquelles on peut la regarder comme décompoſée.

La force L F étant dans la direction T L, affectera la peſanteur de la lune ſur la terre, la diminuera, comme dans cette figure, lorſque le point F ſera en dehors de l'orbite lunaire, l'augmentera lorſque le point F tombera entre T & L. La force L B, perpendiculaire à T L, & par conſéquent tangente à l'orbe de la lune au point L, affectera ſon mouvement en long; & tirant de L en B, ou du lieu actuel de la lune vers la conjonction, le retardera dans le paſſage de la lune vers les quadratures, l'accélérera dans le retour de cet aſtre vers la ſiſygie. Il ne s'agit donc que de déterminer les lignes L O, L B, L F, pour connoître la quantité dont ces forces modifient le mouvement de la lune.

Expression de la force perturbatrice. Puisque G L . T S : : T S^2 . S L^2, & que D L est la différence de T S & S L, il s'ensuit (n°. 90.) que 2 D L est la différence de T S^2 & S L^2, & par conséquent aussi la différence de G L à T S ; donc G L — T S = 2 D L. Or la différence de G D à G L est encore D L ; donc la différence de G D à T S, ou O T, = 3 D L. D L est le sinus de l'arc qui exprime la distance de la lune à la plus proche quadrature, ou le co-sinus de sa distance à la plus proche sisygie : donc L O ou *la force perturbatrice de la lune, est par rapport au rayon & au triple du co-sinus de sa distance à la plus proche sisygie*, le troisiéme côté d'un triangle formé de ces trois lignes.

Expression de la force tangentielle. Prolongez D L en K, vous aurez L K = 2 D L. Tirez K I perpendiculaire sur L T, les triangles rectangles K I F, O T F seront semblables, à cause des parallèles K I, O F ; & l'on aura la proportion O T = 3 D L . L K = 2 D L : : O F = L B . I K ; donc L B . I K : : 3 . 2, & L B = $\frac{3}{2}$ I K. Or I K est le sinus de l'angle K T I, double de l'angle K L I, par conséquent double de son égal C T L, qui exprime la distance de la lune à la plus proche sisygie : donc *la force L B*,

ou la force perturbatrice pour retarder ou accélérer le mouvement de la lune, *est comme* $\frac{3}{2}$ *du sinus du double de la distance de la lune à la plus proche sisygie.* Cette force LB est nulle, quand ce sinus est nul, ce qui arrive *aux quadratures & dans les sisygies;* elle est la plus grande, quand ce sinus est le plus grand : or le plus grand sinus est celui d'un arc de 90°; donc le *maximum* de cette force arrive dans les *octans*, ou à 45° moitié de 90; & comme le sinus de 90 est le rayon, cette force est alors $\frac{3}{2}$ TL; & elle est à la pesanteur de la lune, comme 1 à 119 (n°. 89).

Expression de la force radiale.

Dans les triangles semblables ci-dessus $TF = FL \mp LF$, selon que le point F tombe en-dedans ou en-dehors de l'orbite, de même $IL = TL \mp IT$, selon que I tombe au-dessus ou au-dessous de T. Donc $OT . LK :: TL \mp LF . TL \mp IT :: 3 . 2$, & $2TL \mp 2FL = 3TL \mp 3IT$. Donc ôtant 2TL de part & d'autre, vient $\mp 2FL = TL \mp 3IT$; & divisant par 2, vient $\mp FL = \frac{1}{2} TL \mp \frac{3}{2} IT$. Or IT est le co-sinus de l'angle KTI, double de la distance de la lune à la plus proche sisygie : donc *la force FL*, ou l'effet de la force perturbatrice pour diminuer ou augmenter la pesanteur de la lune, *est comme la somme ou la différence de la*

moitié ou rayon de l'orbite lunaire, & des $\frac{3}{2}$ du co-sinus du double de la distance de la lune à la sisygie la plus voisine.

FL est comme la somme, tant que l'angle OLT est obtus; elle est comme la différence, & ses expressions se détruisent, quand OLT est droit; ce qui arrive (n°. 91) à 54° 44′ de la sisygie; depuis ce point jusqu'à 35° 16′ au-delà de la quadrature, l'angle est aigu, & FL continue d'être comme la différence de ses expressions; & le point F tombe en-dedans de l'orbe dans la direction du rayon. FL se confond avec TL à la quadrature, & vaut 2TL à la sisygie, comme cela suit de sa valeur (n°. 91).

Valeur de la force radiale moyenne.

La force 2TL fait avancer l'apogée; la force TL le fait rétrograder; la différence est TL, en comparant les quadratures avec les sisygies. Mais cette force diminue depuis la sisygie, & s'évanouit à 54° 41′; donc $\frac{1}{2}$ TL peut passer pour une force moyenne qui fait avancer l'apogée dans toute une révolution; & elle est à la pesanteur de la lune (n°. 89), comme 1 à 357; ce qui, selon M. *Machin*, donne 3° 4′ 7″ pour le mouvement de l'apogée dans une révolution, conformément aux observations, & ne donne, selon

M. *Clairaut*, qu'environ 1° 37′, le reste venant de la force LB, qui augmente & roidit le mouvement de la lune.

Telles seroient les forces qui troublent la lune, si le plan de son orbite étoit couché sur le plan de l'écliptique ; mais il lui est incliné d'environ 5° 9′ : donc la force perturbatrice LO se décompose alors en deux forces, l'une L*u*, tirée (fig. 28) du plan de l'écliptique perpendiculairement sur le plan de l'orbe de la lune au point où est ce satellite, l'autre L*o* = *u*O, couchée sur ce plan, laquelle diffère très-peu de LO, tant à cause que L*o* est toujours très-grand par rapport à L*u*, que parce que le peu d'inclinaison de l'orbe de la lune rend toujours l'angle *o*LO très-petit. On peut donc attribuer à la force L*o* tous les effets & tous les troubles que nous avons déduits de LO ; & il ne reste à calculer que la valeur de la force L*u*, perpendiculaire au plan de l'orbite de la lune ; ce qui en affecte ou fait varier l'inclinaison. *Force perpendiculaire au plan de la lune.*

Soit la ligne des nœuds NN entre la quadrature & la sisygie ; sur NN prolongée, s'il est nécessaire, tirez des extrémités de la ligne O*o* = L*u*, les perpendi- *Valeur de la force perpendiculaire au plan de la lune.*

culaires OX, *o*X, l'angle OX*o* qu'elles formeront, sera égal à l'angle de l'inclinaison de l'orbe de la lune au plan de l'écliptique.

Force perpendiculaire au plan de la lune.

Puisque l'augmentation de la pesanteur de la lune à la quadrature est T*c*, le rapport de T*c* à O*o* = L*u* sera celui de l'augmentation de la force centrale à la quadrature à la *force perpendiculaire* qui pousse la lune hors du plan de son orbite, & qui en affecte l'inclinaison. Or, le rapport de T*c* à O*o* est composé de celui de T*c* à TO, de celui de T*o* à OX, & de celui de O*x* à O*o*. Le rapport de T*c* à TO est celui du rayon R *au triple du sinus de la distance de la lune à la plus proche quadrature*; le rapport de T*o* à OX est celui du même rayon R au sinus de l'angle OTX; c'est-à-dire, *au sinus de la distance du nœud à la sisygie*; & enfin le rapport de OX à O*o* est celui du rayon R *au sinus d'inclinaison de l'orbe de la lune au plan de l'Ecliptique*: donc, en composant, T*c* est à O*o*; & par conséquent *l'augmentation de la pesanteur de la lune à la quadrature, est à la force perpendiculaire sur le plan de l'orbe de la lune, pour en troubler l'inclinaison, comme le cube du rayon est au produit du triple sinus de la distance de la lune à la quadrature, par le sinus de la distance*

Valeur de la force perpendiculaire au plan de la lune.

du nœud à la ſiſygie, & par le ſinus de l'inclinaiſon de l'orbe de la lune.

Le premier produiſant, & par conſéquent tout le produit, eſt nul, quand la lune eſt à la quadrature; donc alors cette force perpendiculaire eſt nulle auſſi. Le ſecond produiſant, & par conſéquent le produit, eſt nul auſſi, & conſéquemment la force perpendiculaire, quand le nœud eſt dans la ſiſygie. Enfin le troiſiéme produiſant eſt nul; & l'inclinaiſon ne peut être affectée, quand la lune eſt dans ſon nœud. Au contraire, la force perpendiculaire eſt la plus grande poſſible, quand la lune eſt en ſiſygie & dans ſes limites, parce qu'alors les trois ſinus ſont les plus grands: en général, cette force croît à meſure que la lune s'approche de la ſiſygie, & que le nœud s'en éloigne.

Détermination des aires.

Ces forces ainſi déterminées, Newton en calcule l'effet à-peu-près de cette manière.

Puiſque la force tangentielle L B, perpendiculaire au rayon, eſt un *maximum* dans les octans, & $\frac{100}{11915}$ de la peſanteur de la lune, & que cet aſtre tombant d'un mouvement accéléré le long d'un demi-rayon de ſon orbite, ou de $\frac{1}{2}r$, pendant le tems r, acquerroit (n°. 10) la vîteſſe

avec laquelle il décrit ſon orbe, il s'enſuit qu'avec la force $\frac{100}{11915}$ de ſa peſanteur, il acquerroit dans le même tems r la $\frac{100}{11915}$ partie de ſa vîteſſe de circulation, & que dans le tems Qc, il acquerroit par la même force une vîteſſe plus grande que $\frac{100}{11915}$ en raiſon de Qc à r, ou de $\frac{1}{4}c$ à r, c exprimant la circonférence.

On ſçait par la trigonométrie, & cela ſuit immédiatement de la ſimilitude des triangles IKL, TDL, que le ſinus d'un arc double eſt égal à deux fois le produit du ſinus de l'arc ſimple par ſon co-ſinus diviſé par le rayon; donc LB étant proportionnelle à IK, l'eſt auſſi à $\frac{2DL \times DT}{TL}$, & par conſéquent à $DL \times DT$.

Si on diviſe l'arc QC en un nombre comme infini de parties égales Ll, qui expriment autant de petites parties de tems, & qu'on tire $CG = CT$ (fig. 29), on aura $FD = DT$; & tirant $lu = dD$, les triangles ſemblables Llu, LTD donneront, $lu . LD :: Ll . LT$; & à cauſe des données Ll, LT, lu ſera à LD en raiſon donnée. Donc ſi on multiplie l'un de ces termes par FD, & l'autre par DT ſon égale, les produits $lu \times FD$, $LD \times DT$ ſeront auſſi en raiſon donnée; & la force LB pourra être repréſentée égale-

ment

ment par l'aire $FDdf = lu \times FD$, ou par $DL \times DT$; donc l'aire entière GCDF repréſentera la ſomme de toutes les impreſſions faites ſur la lune par la force L B dans le tems C L, & par conſéquent l'accélération de l'aire CLT par la même force dans le même tems.

Or, dans l'octant F tombe ſur le cercle & ſe confond avec L, de manière que $FD = \frac{LT}{\sqrt{2}}$, & $lu = \frac{Ll}{\sqrt{2}}$; donc alors $lu \times FD = \frac{1}{2} TL \times Ll$; & par conſéquent la vîteſſe que cette force conſtante eût produite pendant le tems C L, ſeroit à la vîteſſe produite dans le même tems par les forces variables, comme $\frac{1}{2} TL \times CL$ à l'aire G C D F; & celle qu'elle produiroit dans le tems C P Q, ſeroit à celle des forces variables, comme $\frac{1}{2} TL \times CQ$ au triangle T C G; c'eſt-à-dire, comme le quart de cercle C Q au rayon T L, ou comme $\frac{1}{4}$ c à r.

Ainſi on a ces deux analogies : la vîteſſe produite par la force L B, telle qu'elle eſt dans l'octant, & pendant le tems Q C, eſt à la vîteſſe produite par la même force dans le tems r, $= \frac{100}{11915}$ de la vîteſſe de la lune, comme $\frac{1}{4}$ q à r; & la vîteſſe produite par la même force de l'octant demeurant uniforme pendant le tems Q C,

eſt à la vîteſſe produite dans le même tems par les forces variables, comme $\frac{1}{4}c$ à r; d'où il ſuit que la vîteſſe produite pendant le tems QC par les forces variables LB, eſt la $\frac{100}{11915}$ partie de la vîteſſe circulaire de la lune.

Donc la vîteſſe de la lune à la quadrature où la force LB eſt nulle, eſt à ſa vîteſſe acquiſe dans les ſiſygies, en vertu des accélérations précédentes faites dans le quart de cercle, arithmétiquement comme 11915 à $11915 + \frac{100}{11915}$, ou comme $11915 - 50$ à $11915 + 50$, & par conſéquent comme 11865 à 11965. Or, dans le cercle, ou dans tout orbe peu différent du cercle, les aires ſont comme les arcs parcourus en même tems, & ceux-ci comme les vîteſſes: donc les aires parcourues par la lune aux ſiſygies & aux quadratures, ſont entr'elles dans le même tems, comme 11965 à 11865.

Cela ſeroit exactement ainſi, ſi le ſoleil ou la terre étoient en repos, & que la révolution ſynodique de la lune ſe fît en $27^{j}. 7^{h}. 43'$; mais puiſque cette révolution eſt plus longue que la ſidérale ou périodique, & ne ſe fait qu'en $29^{j}. 12^{h}. 44'$, il faut augmenter l'incrément des aires en raiſon du tems; c'eſt-

à-dire, en raiſon de 1080853 à 1000000; & l'augmentation de vîteſſe pendant le quart de cercle qui étoit $\frac{100}{11915}$, deviendra $\frac{100}{11023}$, & l'aire dans la quadrature à l'aire dans la ſiſygie, comme 11023 — 50 à 11023 + 50, ou comme 10973 à 11073.

L'orbe de la lune, originairement circulaire, ſe fût changé, par la force perturbatrice du ſoleil, en une ellipſe qui auroit eu ſon grand axe dans les quadratures. Pour trouver le rapport des axes de cette ellipſe, il faut remarquer que la courbure eſt en raiſon composée de la directe de l'attraction & de l'inverſe du quarré de la vîteſſe; que d'une part la peſanteur de la lune ſur la terre dans les ſiſygies, en négligeant les décimales, eſt $1 - \frac{2}{178} = \frac{176}{178}$, & dans les quadratures, $1 + \frac{1}{178} = \frac{179}{178}$; que de l'autre ſa vîteſſe dans les ſiſygies eſt à ſa vîteſſe dans les quadratures, directement comme les aires décrites en ces deux lieux, & réciproquement comme les rayons vecteurs, c'eſt-à-dire, comme les arcs perpendiculaires aux rayons, & par conſéquent comme $11073 \times TQ$ à $10973 \times CT$: dont les quarrés ſont $122611329 \times TQ^2$, & $120406729 \times CT^2$; donc la courbure en C, ou dans la ſiſygie, eſt à la courbure *Rapport des axes.*

en Q dans la quadrature, comme $176 \times 120406729 \times CT^2$ à $179 \times 122611329 \times TQ^2$.

Or, dans tout orbe, la courbure est en raison inverse du rayon du cercle osculateur, & celui-ci dans l'ellipse (sect. con. n°. 72) $= \frac{hh}{q}$; donc la courbure de l'orbe lunaire est par-tout comme $\frac{q}{hh}$. A la sisygie $q = CT$, & $hh = TQ^2$; à la quadrature $q = TQ$, & $hh = CT^2$; donc la courbure à la sisygie est à la courbure à la quadrature, comme $\frac{CT}{TQ^2}$ à $\frac{TQ}{CT^2}$.

Donc $\frac{CT}{TQ^2} . \frac{TQ}{CT^2} :: 176 \times 120406729 \times CT^2 . 179 \times 122611329 \times TQ^2$; & $CT . TQ :: 176 \times 120406729 . 179 \times 122611329$, ou à-peu-près comme 69 à $70 \frac{3}{19}$, & plus exactement dans les nombres de M. Newton, au moyen de quelques corrections nécessaires, comme 69 à 70.

Calcul de la variation. Il suit de-là, que la *variation* de la lune, c'est-à-dire, la différence de son mouvement vrai à son mouvement moyen dans les octans, & lorsqu'elle est la plus grande, est de 35'. 10". Cette variation dépend de la forme de l'orbe, & des inégalités de l'aire, que décrivent les rayons vecteurs tirés de la lune au centre de la terre.

Si un projectile part de la quadrature en même tems que la lune, avec le mouvement moyen de celle-ci & dans une circonférence de cercle, & que de l'octant où je le suppose arrivé, on tire une ordonnée au diamètre du cercle ou grand axe de l'ellipse, on aura (fig. 9) l'aire OCD à l'aire *o*CD, comme CD à C*a* (sect. con. n° 68.), & OY à *o*Y en même raison, & par conséquent comme l'aire entière du cercle à l'aire entière de l'ellipse (sect. con. n° 9.). Donc les tems périodiques étant égaux dans le cercle & dans l'ellipse, qui ont un même grand axe (n° 33.), la lune arrivera au point *o*, quand le projectile arrivera à l'octant en O, l'aire *o*CD sera proportionnelle au tems, & la tangente *o*Y du mouvement vrai à la tangente OY du mouvement moyen, comme 69 à 70, à ne considérer que la figure de l'orbe.

Mais ce rapport des tangentes n'est vrai, qu'autant que les aires sont proportionnelles aux tems; & cela n'a lieu que dans les sisygies & dans les quadratures. Il faut donc diminuer le rapport de la tangente *o*Y du mouvement angulaire vrai, de toute la quantité qui empêche les aires de l'ellipse d'être proportion-

nelles au tems. Or, dans l'octant, l'incrément de l'aire est moyen proportionnel arithmétique entre les incrémens de l'aire à la sisygie & à la quadrature, lequel, dans les nombres peu différens, diffère peu du moyen géométrique; & par-conséquent il est assez exactement au dernier extrême en raison sous-doublée de 11073 à 10973; car si $a . b :: b . c$, on a, $b^2 . c^2 :: a . c$, & $b . c :: \sqrt{a} . \sqrt{c}$. C'est donc dans cette raison, qui est celle de 69 à 68, 6877; qu'il faut diminuer cette tangente, laquelle sera 69 × $\frac{68,6877}{69}$; & l'on aura par la première proportion, OY . *o*Y :: 70 . 69; & par la seconde, *o*Y à la tangente corrigée, comme 69 à 68, 6877; & par conséquent OY tangente du mouvement moyen à la tangente corrigée du mouvement vrai, comme 70 à 68, 6877.

Ainsi, dans les octans où le mouvement moyen est un angle de 45°, dont la tangente est 10000, en cherchant l'angle *o*CD par sa tangente, qui est 9812 $\frac{1}{2}$ par la proportion précédente, on le trouvera de 44°. 27′. 28″, ce qui soustrait de 45°, mouvement moyen, donne pour *la variation*, ou pour la différence, 32. 32″; & augmentant les angles en raison

du mois ſynodique à la révolution ſidérale, parce que l'aire eſt accélérée pendant plus de 90° en même raiſon, l'on aura 35′ 10″, pour *la variation* dans les octans, à la moyenne diſtance de la terre au ſoleil. Dans le périhélie de la terre, la force du ſoleil ſur la lune eſt plus grande, & le mois ſynodique plus long; deux cauſes qui augmentent *la variation*, qui eſt alors de 37′, 11″, & n'eſt plus que de 33′ 14″, dans l'apogée du ſoleil.

Mouvement du nœud, & ſa quantité.

Si la ligne des nœuds eſt dans les quadratures, & la lune en ſiſygie, alors les ſinus de la diſtance de la lune à la quadrature, du nœud à la ſiſygie, & de l'incliNaiſon de l'orbe proportionnel à celui de la diſtance de la lune à ſon nœud, dont le produit exprime *la force perpendiculaire ſur le plan de la lune*, ſont chacuns ſéparément égaux au rayon; & la force qui fait rétrograder le nœud, eſt alors à l'augmentation de la peſanteur de la lune dans les quadratures, $(=\frac{1}{178,735})$, comme trois fois le cube du rayon au cube de ce rayon, ou comme 3 à 1; & par conſéquent la force perturbatrice du nœud eſt dans ce cas $\frac{3}{178,735} = \frac{1}{59,575}$ de la peſanteur entière de la lune.

Donc, puiſque le moyen mouvement horaire de cet aſtre, par rapport aux fixes, eſt de $32'.56''.27'''.12^{iv}\frac{1}{2}$, & qu'il acquerroit ce mouvement par ſa peſanteur, en tombant dans le tems *r* de la moitié de ſon rayon ou de ſa diſtance au centre de la terre, le mouvement horaire de ſon nœud dans ce cas, & en vertu de cette force perturbatrice, n'en ſera que la $\frac{1}{59,575}$e partie, & ſera par conſéquent de $33''.10'''.33^{iv}.12^{v}$.

Dans les autres poſitions du nœud, ſon mouvement ſera à cette quantité, comme trois fois le produit des ſinus des diſtances de la lune à la quadrature, de la lune au nœud, & du nœud à la ſiſygie, au cube du rayon, & dès-lors en raiſon beaucoup moindre. *Son mouvement moyen ſera même à chaque révolution*, quelle que ſoit la ſituation du nœud, *la moitié ſeulement de ce qu'il eſt au moment où la lune eſt en ſiſygie dans cette révolution.*

En effet, ſoit *N n* (fig. 30.) la ligne des nœuds, Q *q* celle des quadratures, S le ſoleil, P le lieu de la lune, PK le ſinus de ſa diſtance à la quadrature, PH celui de ſa diſtance à ſon nœud, & AZ celui de la diſtance du nœud au ſoleil, la vîteſſe du nœud ſera en ce cas com-

me PK × PH × AZ, tirant M*d* parallèle à PK ou PD, & PR perpendiculaire ſur elle, à cauſe des triangles ſemblables MPR, PKT, on aura PT . PK : : PM . PR; or PT eſt conſtante, & PM eſt donnée, puiſque le cercle repréſentant le mouvement moyen de la lune, eſt ſuppoſé diviſé en petits arcs égaux PM, dont PR eſt comme PK.

Pour la même raiſon, AT . PD : : AZ . PH, & à cauſe de la conſtante AT, PH eſt comme PD × AZ; par conſéquent PK × PH, comme PR × PD × AZ, & PK × PH × AZ comme PR × PD × AZ^2, ou comme l'aire PD*d*M × AZ^2.

Si la lune va de Q à M, la ſomme des aires PD*d*M eſt égale à l'aire QMDE, terminée par la tangente QE. Lorſqu'elle arrive au point *n*, cette ſomme eſt l'aire entière EQA*n*, décrite par la ligne PD, & lorſqu'elle va de *n* à *q*, la ligne PD tombe hors du cercle, & décrit l'aire *qne* terminée par la tangente *qe*. Alors cette tangente eſt dirigée ſelon la ſuite des ſignes, & le nœud eſt progreſſif : il faut donc retrancher cette aire *qne* = QNE de l'aire entière EQA*n*, & le demi-cercle reſtant NQA*n* ſera la ſomme des

aires P D d M, pendant que la lune ſe meut dans le demi-cercle Q A q.

Dans la ſiſygie, l'aire P D d M eſt égale au rectangle fait ſous l'arc P M & le rayon A T = P T; & la ſomme de toutes ces aires P M × P T, pendant que la lune décrit la demi-circonférence, ſeroit comme la ſomme des P M, multipliée par P T, ou comme le rectangle fait de la demi-circonférence & du rayon, & par conſéquent double de l'aire N Q A n, qui exprime la ſomme précédente, & l'effet des forces variables. Donc, quelle que ſoit la poſition de la ligne des nœuds, *ſi le nœud ſe mouvoit uniformément avec toute la vîteſſe qu'il a, quand la lune eſt dans les ſiſygies, il parcourroit dans ſa rétrogradation un eſpace double de celui qu'il parcourt en vertu des forces variables.*

Or, quand la ligne des nœuds eſt en quadrature, nous avons vu que le plus grand mouvement horaire du nœud eſt de 33″. 10‴. 33^{iv}. 12^{v}; donc ſon mouvement horaire moyen dans ce cas eſt la moitié de cette quantité, ou de 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}; & en faiſant les corrections néceſſaires, tirées de l'ellipticité de l'orbe & de la plus grande vîteſſe ou abbréviation du tems dans les ſiſygies, ce qui di-

minue le mouvement du nœud ; ce mouvement moyen n'eſt plus que de 16″. 16‴. 37^{iv}. 42^{v} dans cette poſition de la ligne des nœuds ; ce qui feroit 39°. 38′. 7″. 50‴, dans une année ſidérale de 365^{j}. 6^{h}. 9′, ſi la force reſtoit uniforme.

Mais le mouvement du nœud n'eſt pas le même dans toute révolution. Il eſt dans tous les cas comme $PDdM \times AZ^2$; de plus, $AZ = AT$, lorſque les nœuds ſont en quadrature, & l'aire $PDdM$ eſt donnée dans tous les cas, quand la lune eſt dans les ſiſygies, puiſqu'alors elle eſt toujours $PM \times AT$. Donc, dans les ſiſygies de la lune, & quand la ligne des nœuds n'eſt pas dans les quadratures, le moyen mouvement horaire du nœud eſt à 16″. 16‴. 37^{iv}. 42^{v} moyen mouvement horaire du nœud placé en quadrature, comme AZ^2 à AT^2 ; & les ſommes de ces mouvemens horaires ſont comme les ſommes des quantités AZ^2 & AT^2.

Pour les déterminer, ſoit le nœud placé en N ; ſuppoſons qu'après chaque heure il y ſoit replacé pour conſerver une ſituation conſtante par rapport aux fixes, dans le tems que le ſoleil s'éloignera lui-même du nœud par ſon mouvement apparent, & décrira dans des tems très-courts

de petits arcs A *a* par l'interſection du cercle & de la ligne TS (fig. 31) toujours dirigée au ſoleil. Alors cet aſtre parcourra le cercle N A *n* N dans l'eſpace d'un an ; la ligne des nœuds obtiendra toutes les ſituations poſſibles par rapport à lui, & ſon mouvement horaire moyen ſera par-tout dans ce cercle, comme AZ^2 ; or, à cauſe des triangles ſemblables A *a o*, ATZ, on aura AT . A *a* : : AZ . A *o* = YZ : donc AZ & YZ ſeront en raiſon donnée, à cauſe des conſtantes AT, A *a*; & multipliant tout par AZ, on aura AZ^2, qui exprime le mouvement du nœud, proportionnel à AZ × YZ, ou à l'aire AZY *a*, la ſomme des premieres comme la ſomme des ſecondes, ou comme l'aire totale N A Z.

Or AT^2 ou la plus grande aire AZY *a*, lorſque T S eſt perpendiculaire ſur N *n*, eſt égale au rectangle fait de l'arc A *a*, & du rayon entier du cercle ; & par conſéquent la ſomme des premières N A Z eſt à la ſomme des ſecondes, comme l'aire entière du cercle au produit de la circonférence par le rayon, ou comme 1 à 2. Donc, puiſque le mouvement moyen qui répond à la plus grande aire, lorſque les nœuds ſont en quadrature, ou que T S

eſt perpendiculaire ſur N*n*, a été trouvé de 16″. 16‴. 37^iv. 42^v par heure, ou de 39°. 38′. 7″. 50‴ par an, la ſomme qui répond à la ſomme de tous les mouvemens moyens, & qui n'en eſt que la moitié, eſt de 19°. 49.′ 3″. 55‴ par année. Et faiſant les corrections néceſſaires, tirées de l'abbréviation du tems que le ſoleil met à revenir au nœud d'où il eſt parti, cauſée par le mouvement même de ce nœud, ce mouvement n'eſt plus que de 19°. 18′. 1″. 23‴ par année ſidérale. M. *Caſſini* le détermine par obſervation de 19°. 20′. 34″, dont la différence n'eſt guères que de deux minutes & demie; ce qui reparti dans le nombre des minutes qui compoſent une année, eſt abſolument inſenſible.

Nœud de Jupiter & de ſon quatriéme ſatellite.

Par le calcul des forces, le nœud du quatriéme ſatellite de Jupiter devroit être rétrograde par la force perturbatrice du ſoleil, & parcourir 8°. 24′ en cent ans. Cependant l'obſervation montre qu'il eſt direct; ce qui vient de l'action des ſatellites intérieurs beaucoup plus gros que lui. Conformément à la théorie, le nœud de ce quatriéme ſatellite eſt rétrograde ſur chacune des orbites de ces ſatellites intérieurs; mais ces mouvemens rapportés à

l'écliptique, donnent à ce nœud un mouvement direct par rapport à elle.

En général, quand l'angle de la planète troublante eſt plus grand ſur l'écliptique que celui de la planète troublée, la poſition nouvelle de l'orbe de celle-ci, produite par la rétrogradation du nœud, n'entrecoupe le premier qu'après avoir paſſé l'écliptique; & dès-lors il la coupe dans un point plus avancé ſelon l'ordre des ſignes; ce qui rend le nœud progreſſif.

Au contraire, quand l'angle de la planète troublée avec l'écliptique, eſt plus grand que celui de la planète troublante, le nouvel orbe de la première coupe ſa première poſition, avant que d'avoir paſſé l'écliptique, & la traverſe par conſéquent dans un point plus reculé; ce qui rend le nœud rétrograde ſur l'écliptique, auſſi-bien que ſur l'orbe de la planète troublante.

C'eſt pour cette raiſon que l'inclinaiſon de Saturne ſur l'écliptique étant plus grande que celle de Jupiter, le mouvement du nœud de celui-ci, rétrograde ſur l'orbe de Saturne, eſt néanmoins direct ſur l'écliptique. Sur quoi *voyez l'Aſtr. de M. de la Lande.*

La force qui fait rétrograder le nœud, fait varier l'inclinaiſon ; mais elle a moins d'effet ſur elle que ſur le nœud. C'eſt comme une force attachée au bras court d'un levier, qui a moins d'efficace qu'une autre force égale, attachée à un bras plus long.

Variations de l'inclinaiſon de l'orbe de la lune ; ſa quantité.

Soit A*a* les ſiſygies (fig. 32.), Q*q* les quadratures, N & *n* les nœuds, P le lieu de la lune dans ſon orbe, *p* ſon lieu rapporté à l'écliptique, P*p* une perpendiculaire tirée de l'orbe de la lune ſur l'écliptique, l'angle *m*T*l* le mouvement inſtantané du nœud ; ſi des deux plans & des points P & *p* on mene ſur T*m* les perpendiculaires PG, *p*G, & qu'on prolonge celle-ci juſqu'en *g*, qu'on joigne les points P & *g* par la ligne P*g*, l'angle PG*p* ſera l'inclinaiſon de l'orbe lunaire au plan de l'écliptique, lorſque la lune eſt en P ; l'angle P*gp* ſera l'inclinaiſon du même orbe au bout d'un inſtant, & l'angle GP*g* ſera la variation momentanée de cette inclinaiſon. Donc la variation momentanée de l'inclinaiſon ſera à la variation inſtantanée du nœud, comme l'angle GP*g* à l'angle GT*g* = *m*T*l*.

Or, dans le triangle GP*g*, *ſin*. P.

Gg : : *ſin*. G . Pg = PG à très-peu près. Le ſinus de l'angle G ou PGg eſt le même que celui de ſon complément ; donc ſi l'on prend PG pour le rayon, Pp ſera le ſinus de l'angle G, & l'on aura, *ſin*. P . Gg : : Pp . PG.

Dans le triangle GTg, Gg . *ſin*. T : : Tg = TG . *ſin*. G = r ou le rayon, à cauſe de l'angle droit en G, = PG; donc en composant ces raiſons, *ſin*. GPg. *ſin*. GTg : : TG×Pp . PG² : or, quand les angles ſont très-petits, ils ſont comme leurs ſinus : donc GPg, ou la variation momentanée de l'inclinaiſon, eſt à GTg, ou à la variation inſtantanée du nœud, comme TG × Pp à PG², & par conſéquent en raiſon beaucoup moindre.

Si au lieu d'un moment on ſubſtitue une heure, on aura l'angle GTg, ou la variation horaire du nœud à un angle de $33''. 10'''. 33^{iv}$, comme IT × PG× AZ à AT³, comme il a été démontré ci-devant ; donc en compoſant cette raiſon avec la précédente, on aura la *variation horaire de l'inclinaiſon*, ou l'angle horaire GPg à un angle de $33''. 10'''. 33^{iv}$, comme IT× PG×

$PG \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG^2}$ à AT^3, & par conséquent comme $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ à AT^3.

Quand la ligne des nœuds est en quadrature, $AZ = AT$, Nn tombe sur Qq, & $TG = TK$; donc alors *la variation horaire de l'inclinaison* est à l'angle de 33″. 10‴. 33^iv, comme $IT \times TK \times \frac{Pp}{PG}$ à AT^2; & multipliant par 2, divisant par AT, comme $\frac{2IT \times TK}{AT} \times \frac{Pp}{PG}$ à $2AT$; c'est-à-dire, comme le sinus du double de la distance de la lune à la quadrature multipliée par $\frac{Pp}{PG}$ à deux fois le rayon; & la somme de toutes ces variations horaires, dans le tems que la lune passe des quadratures aux sisygies dans cette situation des nœuds = 177 h. 10′, à la somme d'autant d'angles de 33″. 10‴. 33^iv = 5878″, comme la somme de tous les sinus des doubles distances de la lune à la quadrature $\times \frac{Pp}{PG}$ à la somme d'autant de diamètres, c'est-à dire, comme nous l'avons vu en calculant l'incrément de l'aire *, comme deux fois le triangle TCG (fig. 29.) $\times \frac{Pp}{PG}$ à $\frac{1}{4}c \times 2TL = \frac{1}{2}c \times TL$; par

* En faisant le sinus total ou $AT = 1$.

conséquent, comme $r \times \frac{Pp}{PG}$ à $\frac{1}{2} c$, ou comme $2 r \times \frac{Pp}{PG}$ à c, ou enfin comme le diamètre multiplié par le rapport du sinus de l'inclinaison au sinus total, à la circonférence entière ; c'est-à-dire, si l'inclinaison est de 5°. 1′, dont le sinus est 874, comme $7 \times \frac{4}{10000}$ à 22 ; ce qui est le rapport de 278 10000. On a donc cette proportion x, ou *la somme de toutes les variations horaires de l'inclinaison, dans le tems que la lune passe des quadratures aux sisygies*, est à 5878″ : : 278 . 10000 ; ce qui donne $x = 163″ = 2′. 43″$ dans cette position des nœuds, & au bout d'un quart de cercle, en partant du nœud.

Dans les autres situations du nœud, T G est comme une quantité variable × TZ, co-sinus de la distance du nœud au soleil, & M. Newton démontre que la somme des ITX par cette quantité variable est comme le cercle Q A q a; par conséquent le rapport des $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ à AT^3 devient celui de la circonférence $\times AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ à ZAT^2. D'où il suit que *la variation horaire moyenne de l'inclinaison*, d'où pourroit résulter la variation totale pendant le mois, est à 33″.

10‴. 33^{iv}, comme $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ à 2 AT², ou comme $Pp \times AZ \times TZ$ à $PG \times 2AT^2$, & multipliant par 2, divisant par AT, comme $Pp \times \frac{2AZ \times TZ}{AT}$ à $PG \times 4AT$; c'est-à-dire, *comme le sinus de l'inclinaison multiplié par le sinus du double de la distance du nœud au soleil, à quatre fois le quarré du rayon*, (car PG est par rapport à Pp, comme AT ou le rayon). Donc *la somme des augmentations de l'inclinaison pendant le tems du passage du nœud des quadratures aux sisygies* = $2079 \frac{7}{10}$ h., est à la somme d'autant d'angles de 33″. 10‴. 33^{iv}. = 33″. 10‴. 33^{iv}. $\times 2079 \frac{7}{10}$, *en raison composée du sinus d'inclinaison à quatre fois le rayon, & de la somme des sinus des doubles distances du nœud à la sisygie à la somme d'autant de fois le rayon.*

Si l'inclinaison moyenne est de 5°. 8′. 30″, dont le sinus est 896, la première raison est celle de 896 à 40000, ou de 224 à 10000; la seconde est celle de deux fois le triangle TCG à $\frac{1}{4} c \times AT$, ou de r à $\frac{1}{4} c$; & multipliant par 2, comme celle de $2r$ à $\frac{1}{2} c$, ou du diamètre à la demi-circonférence, qui est celle de 7 à 11. Donc, en composant ces raisons,

la somme des augmentations de l'inclinaison dans le passage des nœuds des quadratures aux sisygies, est à 33″. 10‴. 33^{iv} × 2097 $\frac{7h.}{10}$, comme 224 × 7 à 110000; ce qui donne 16′. 23″. 30‴ pour *l'augmentation totale de l'inclinaison dans le passage du nœud de la quadrature à la sisygie.*

Quand la ligne des nœuds est en quadrature, & la lune en sisygie, la variation de l'inclinaison au bout d'un quart de cercle, en partant du nœud, a été trouvée de 2′. 43″; c'est-à-dire, que l'inclinaison est moindre de cette quantité, quand la lune est en sisygie, que quand elle est dans la quadrature; donc diminuant de la moitié de cette quantité la variation totale que nous venons de trouver, la variation totale, moyenne dans les quadratures de la lune, sera de 15′, 2″; & l'augmentant de la même quantité dans les sisygies de la lune, elle sera de 17′. 45″. Toute la variation produite par le passage des nœuds des quadratures aux sisygies, sera donc, au moment de l'appulse de la lune, à la sisygie de 17′ 45″, & par conséquent si quand le nœud est en sisygie, l'inclinaison est de 5°. 17′. 20″, elle sera de 4°. 59′. 35″, lorsque les

nœuds ſeront en quadrature, & la lune en ſiſygie; ce qui s'accorde avec l'obſervation.

Le mouvement de l'apogée ſouffre plus de difficultés; & nous ne pouvons en donner qu'une idée dans une expoſition élémentaire. En calculant les effets de la *force radiale*, ou de cette partie de la force perturbatrice qui agit dans la direction du rayon, M. Newton trouve que la ſomme des mouvemens de la lune & de l'apogée, en vertu de cette ſeule force dans une révolution, en nommant c la force radiale, eſt au mouvement de la lune ſeule $= 360^\circ$, comme $\sqrt{1-c}$ à $\sqrt{1-4c}$; & qu'ainſi la ſomme du mouvement de la lune & de l'apogée $= 360^\circ \times \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ dans une révolution. Or $\frac{1-c}{1-4c} = 1 + 3c$ à très-peu près, dont la racine, à cauſe de la petiteſſe de c par rapport à 1, eſt (n°. 90.) $1 + \frac{3}{2}c$; donc $\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}} = 1 + \frac{3}{2}c$; & la ſomme du mouvement de la lune & de l'apogée eſt $360^\circ \times 1 + \frac{3}{2}c = 360^\circ + 360 \times \frac{3}{2}c$; d'où retranchant 360° pour le mouvement de la lune, reſte pour celui de l'apogée dans une révolution $360^\circ \times \frac{3}{2}c = \frac{3}{2} \times 360 \times \frac{1}{357}$, en mettant à la place de c ſa valeur $= \frac{1}{357}$; ce qui

Détermination du mouvement de l'apogée.

donne 1°. 31′. 35″, pour le mouvement de l'apogée de la lune dans une révolution de ce ſatellite ; ce qui eſt la moitié à-peu près de l'obſervation.

Si la lune ſe mouvoit ſur la périphérie d'un plan ſolide, dont les rayons vecteurs s'accourciſſent ou s'allongeaſſent ſelon que l'exige la force radiale, & que la force L B fût appliquée immédiatement ſur l'apogée, ou ſur tel rayon vecteur qu'on voudra de cet orbe ſolide, le mouvement de la lune dans le plan de cet orbe ſeroit le même que ſi la force L B lui étoit immédiatement appliquée, & l'apogée tourneroit avec une vîteſſe proportionnée à cette force L B. Or à la ſiſygie la ſomme des incrémens produits par la force tangentielle L B, eſt la $\frac{100}{11023}$ partie de la vîteſſe de la lune ; donc l'incrément moyen, d'où réſulteroit une révolution en même-tems, s'il reſtoit uniforme, eſt $\frac{50}{11023}$ ou $\frac{1}{220}$e partie de la vîteſſe de la lune ; & par conſéquent lorſque la lune auroit parcouru 360°, l'apogée, en vertu de cette force, en auroit parcouru la $\frac{1}{220}$e partie, ou $\frac{360}{220}$° ; ce qui donne 1°. 38′ 2″, en vertu de cette force tangentielle, & en vertu des deux forces perturbatrices 3°. 9′. 37″ dans une révolution, & 39°. 5′ en treize révolutions, ou dans à-peu-près un an.

Quoique la lune ne se meuve point sur un tel orbe, elle se trouve à tous momens par l'effet de la force L B, dans les mêmes points de l'espace absolu, que si cette force agissoit immédiatement sur l'apogée, & que la lune n'en reçût l'impression qu'au moyen d'un orbe solide, & le même phénomène doit résulter dans un cas comme dans l'autre.

En effet, la vîtesse moyenne de la lune, par l'augmentation de la force LB, étant $1 + \frac{1}{220}$, son quarré, qui exprime la force centrifuge, est $1 + \frac{2}{220}$; & c'est de la quantité $\frac{2}{220} = c$ que la pesanteur de la lune est diminuée par la force L B. Si cette force agissoit sur la lune absolument de la même manière que la force radiale, on auroit, par la démonstration de Newton, la somme des quarrés du mouvement de la lune & de l'apogée au quarré de la vîtesse moyenne de la lune, comme $1 - c$ à $1 - 4c$. Mais puisque la force tangentielle augmente le quarré de la vîtesse moyenne de la lune de la quantité c, tandis que la force radiale le diminuoit au contraire de toute sa quantité, comme on le voit (fig. 21), cela fait une double différence dont il faut tenir compte, & le rapport précédent n'est plus que celui de $1 - c$ à $1 - 2c$; ce qui donne

$360^\circ \times \sqrt{\frac{1-c}{1-2c}}$ pour le mouvement de la lune & de l'apogée, ou, ce qui est la même chose, $360^\circ \times 1 + \frac{1}{2} C$; & $360 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{220} = \frac{360}{220}$ pour le mouvement de l'apogée seul dans une révolution en vertu de la force tangentielle ; ce qui complete le mouvement total, & le rend conforme aux observations.

Mouvement de l'aphélie de la terre, par la perturbation de Jupiter.

Puisque Jupiter attire la terre à lui, il en diminue la pesanteur sur le soleil, & fait avancer son aphélie ; & dans une révolution de la terre ou dans un an, cette progression est, par la régle de M. Newton, de $360^\circ \times \frac{3}{2} c$, en prenant c pour la force perturbatrice moyenne, & $360 \times \frac{3}{4} c$ en prenant c pour le double de cette force perturbatrice : ainsi, pour calculer cette progression, il suffit de connoître la quantité c.

Les distances de Jupiter & de la terre au soleil étant à-peu-près comme 52 à 10, l'augmentation de la pesanteur de la terre sur le soleil dans ses quadratures avec Jupiter, est à la pesanteur du soleil sur Jupiter, comme 10 à 52, ou comme $\frac{10}{52}$ à 1 (n° 89).

Or cette tendance, 1, du soleil vers Jupiter est à la pesanteur de la terre sur le soleil, directement comme la masse $\frac{1}{1067}$ de Jupiter à la masse 1 du soleil, & ré-

ciproquement comme les quarrés des diſtances reſpectives, & par conſéquent comme $\frac{1}{1067 \times 2704}$ à $\frac{1}{100}$, ou comme $\frac{1}{1067 \times 2704}$ à 1.

Donc l'augmentation de la peſanteur de la terre par Jupiter diſtant de 90°, eſt à la peſanteur naturelle ſur le ſoleil, comme $\frac{10}{52} \times \frac{100}{1067 \times 2704}$ à 1; ce qui eſt à très-peu-près le rapport de $\frac{1}{150029}$ à 1; & par conſéquent elle eſt la $\frac{1}{150029}$e partie de la peſanteur naturelle.

Or nous avons vu, en donnant l'expreſſion de la force radiale de la lune, que l'augmentation de la peſanteur dans les quadratures eſt double de la diminution moyenne; donc le mouvement de l'aphélie de la terre par la perturbation de Jupiter, eſt comme $360° = 1296000'' \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{150029}$; ce qui donne $6''.25''$, en vertu de la force radiale, & $14''$ par an, en vertu des deux forces perturbatrices; ce qui approche de plus près de $17''$ par an que donne l'obſervation avec laquelle le calcul même s'accorde, lorſqu'on le fait plus rigoureux.

FIN.

TABLE
DES CHAPITRES.

Fin de la Table.

ERRATA.

PAGE 12. *ligne* 9. continue, *lisez* continuera. RÉF.
13. *lig.* 11. ce qui empêche, *lis.* ce qui empê-
P. chera.
P. 29. *lig.* 11. axe, *lis.* arc.
P. 34. *lig.* 8. il ne s'agit que de, *lis.* il s'agit de.
P. 36. *lig.* 16. devoient, *lis.* doivent.
P. 37. *lig.* 8. *post.* lis. *per.*
P. 51. *lig.* 6. s'attirassent, *lis.* s'attiroient.

P. 3. *lig.* 20. sera sur le, *lis.* sera le. SECT. C.
P. 3. *lig.* 24. $\frac{ap}{a2}$, *lis.* $\frac{ap}{2}$.
P. 14. *lig.* 20. beaucoup plus, *lis.* plus.
P. 17. *lig.* 23. cercles, *lis.* courbes.
P. 19. *lig.* 25. $\pm$, *lis.* $\mp$.
P. 20. *lig.* 11. on aura, *lis.* aura.
P. 20. *lig.* 31. ou *FM*, *lis.* $= FM$.
P. 23. *lig.* 4. ou *FM*, *lis.* ou *FN*.
P. 24. *lig.* 4. $\frac{pa \pm px}{2a}$, *lis.* $\frac{pa \mp px}{2a}$.
P. 29. *lig.* 6. *Mtz*, *lis.* *MtZ*.
P. 33. *lig.* 26. *YK* : : *LY*, *lis.* *YK* : : *lY*.
P. 34. *lig.* 1. $-g$, *lis.* $=g$.
P. 34. *lig.* 23. en g, *lis.* $\overline{mg}$.
P. 36. *lig.* 2. AD^2, *lis.* $\overline{AO}^2$.
P. 38. *lig.* 21. $CR^2 + xx$, *lis.* $CR^2 = xx$.
P. 42. *lig.* 24. *AC*, *lis.* *aC*.
P. 46. *lig.* 5. $R = u$, *lis.* $R = n$.

P. 18. *lig.* 10. $uu = \frac{1}{rr}$, *lis.* $uu = \frac{r}{rr}$. INSTIT.
Ibid. *lig.* 2. $\frac{r^2}{r^3} = r$, *lis.* $\frac{r^2}{r^4} = r^3$.

P. 20. *lig.* 1. :: *tr*, *lis.* :: *t*. *r*.

P. 29. *lig.* 18. comme, *lis.* commun.

Ibid. lig. 25. $a \times L$, *lis.* $a^3 \times L$.

P. 49. *lig.* 6. d'une, *lis.* une.

P. 61. *ligne derniere.* $aa - b :: bb - c$, *lis.* $a . a - b :: b . b - c$.

P. 74. *lig.* 18. regénérateur, *lis.* générateur.

P. 77. *lig.* 10. $\frac{2FH^3}{3PC^3}$, *lis.* $\frac{2FH^3}{3PC^2}$.

P. 178. *lig.* 7. vers le par haut, *lis.* vers le haut par.

P. 193. *lig.* 20. comme $\frac{1}{2}$, *lis.* comme $\frac{1}{2}$.

P. 202. *lig.* 21. composé, *lis.* compensé.

P. 226. *lig.* 1. comme à 3, *lis.* comme 3 à.

P. 246. *lig.* 29. convaincue, *lis.* vaincue.

P. 274. *lig.* 14. restringente, *lis.* refringente.

P. 275. *lig. derniere.* une, *lis.* à une.

P. 310. *lig.* 28. on peut, *lis.* on ne peut.

P. 316. *lig.* 14. $\frac{c}{u}$, *lis.* $\frac{u}{c}$.

P. 317. *lig.* 7. lieux, *lis.* milieux.

P. 320. *lig.* 1, la derniere, *lis.* où la derniere.

P. 336. *lig.* 11. & qu'on ne le fasse pas, *lis.* & qu'on ne le fait pas assez.

P. 366. *lig.* 12. T*o* à OX, *lis.* TO à OX.

Ibid. lig. 13. O*x* à O*o*, *lis.* OX à O*o*.

Ibid. lig. 16. T*o* à OX, *lis.* TO à OX.

P. 386 *lig.* 20. ITX, *lis.* IT multiplié.

Ibid. lig. 24. ZAT^2, *lis.* $2AT^2$.

P. 393. *lig.* 9. $\frac{1}{1075 \times 2704}$, *lis.* $\frac{100}{1067 \times 2704}$.

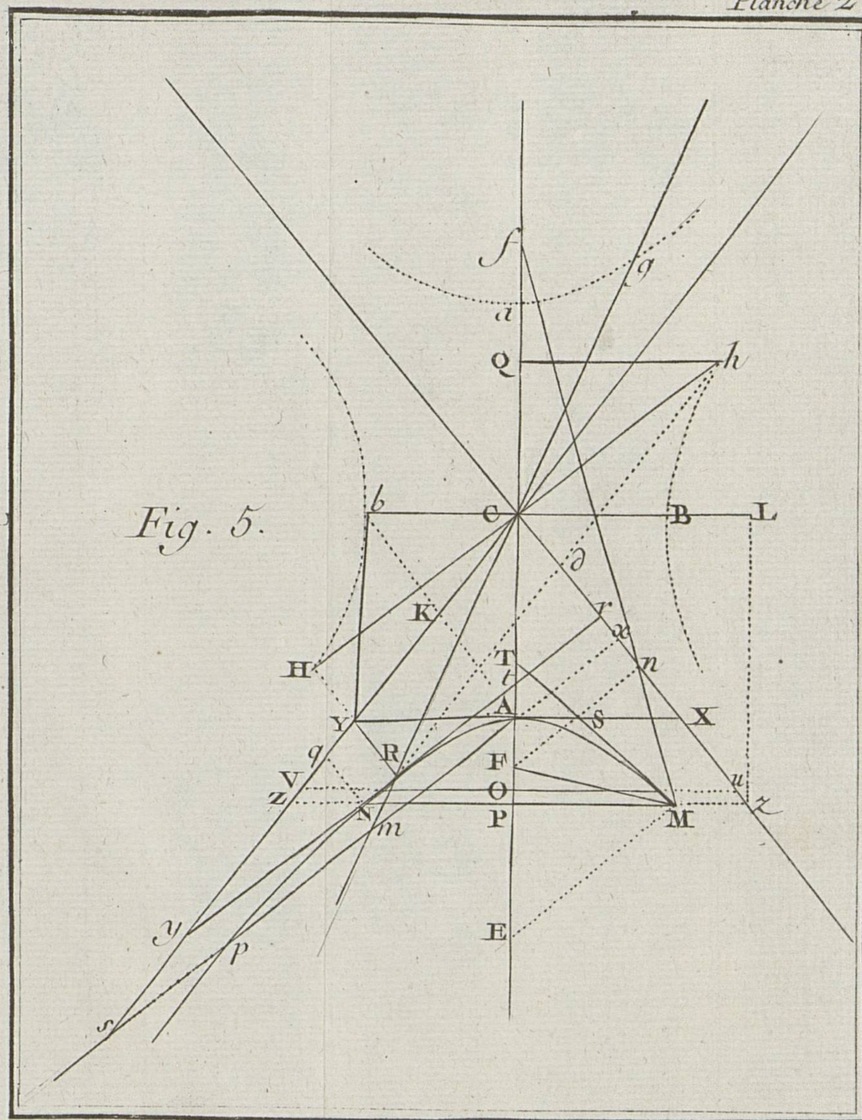
Fig. 1.

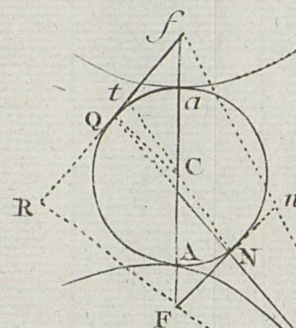
Fig. 2.

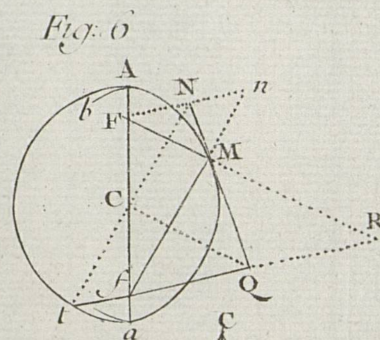
Fig. 3.

Fig. 4.

Planche 2




f
t
a
Q
C
R
n
A
N
F
M
Fig 7


Fig. 6
A
N
n
b
F
M
C
R
Q
f
t
a

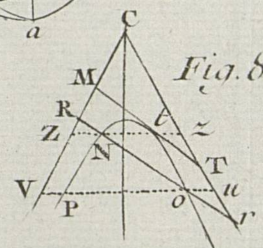
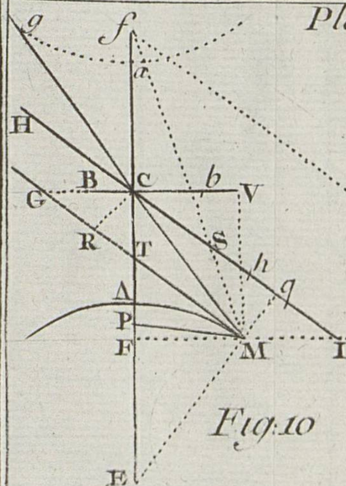
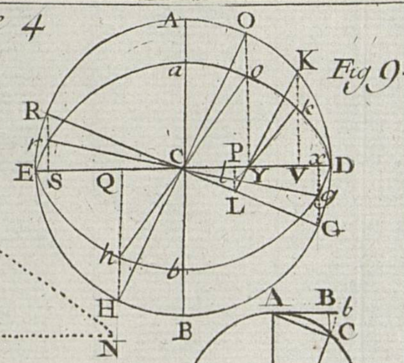
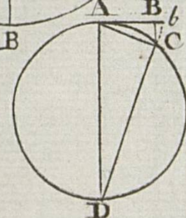
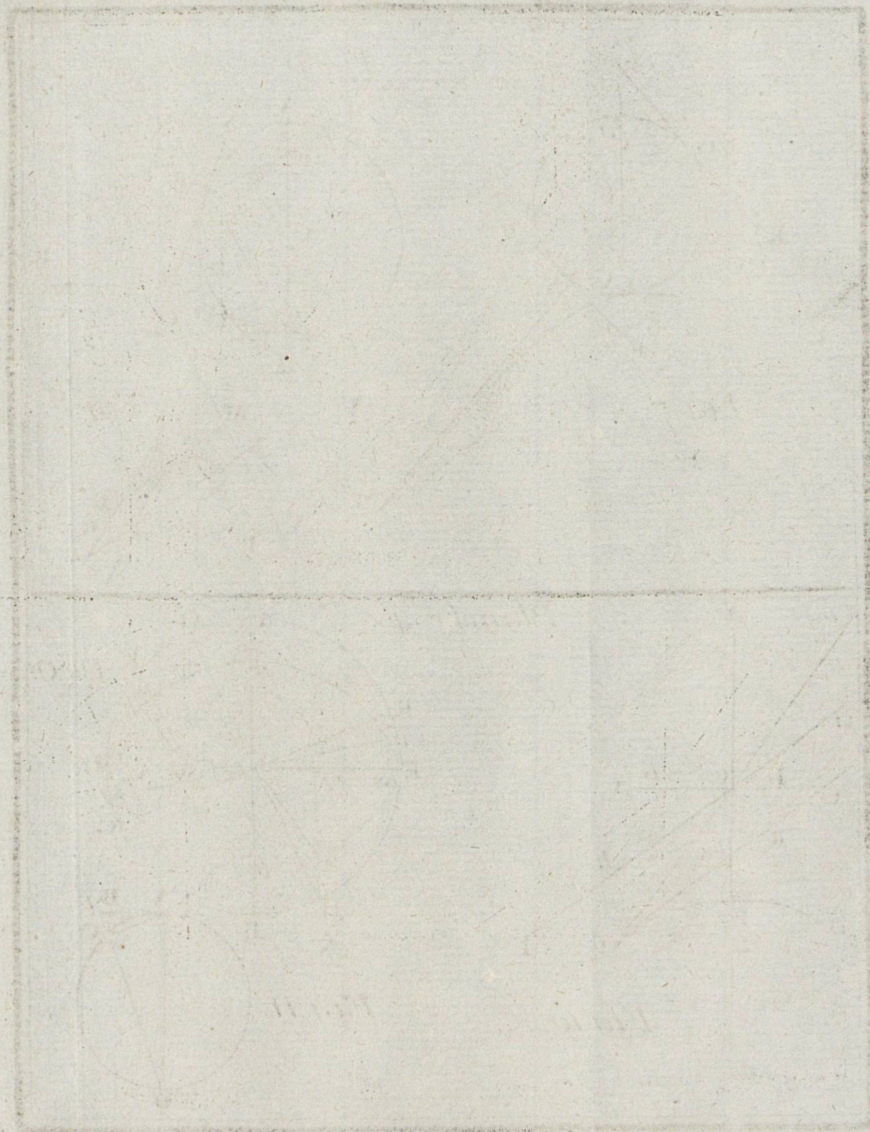

C
Fig. 8
M
R
t
Z
z
N
T
V
u
P
o
r

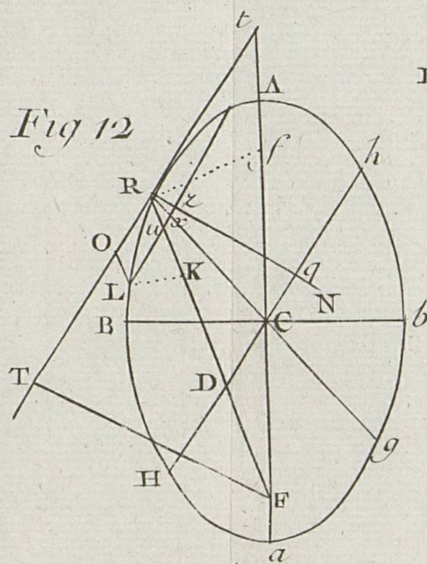
Planche 4

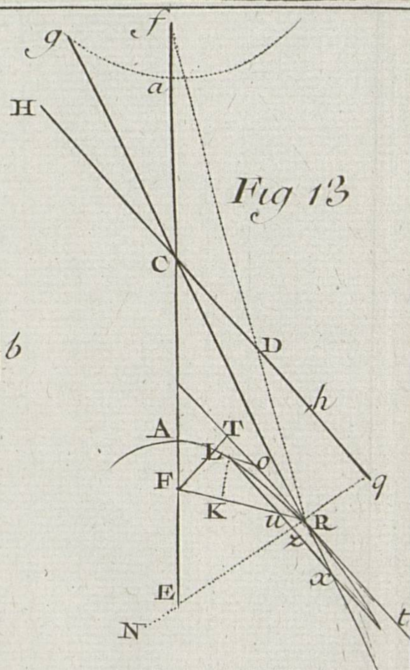

g
f
a
H
B
C
b
V
G
R
T
S
h
q
A
P
F
M
I
N
E
Fig. 10

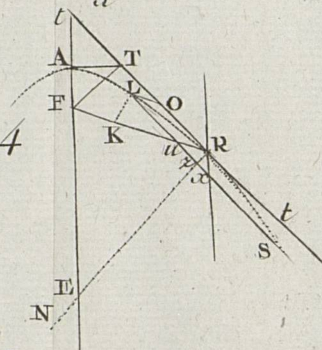

A
O
a
o
K
Fig 9
R
k
r
P
x
E
S
Q
C
l
Y
V
D
L
g
G
h
b
H
B

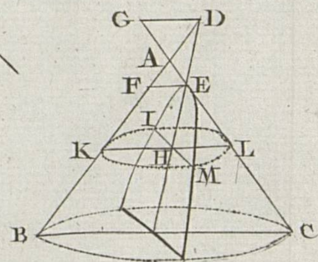

A
B
b
C
D
Fig. 11




Fig 12
t
A
f
h
R
z
u
x
O
K
q
L
N
B
C
b
T
D
g
H
F
a


g
f
a
H
Fig 13
C
D
h
A
T
L
o
F
q
K
u
R
z
x
E
N
t


t
A
T
L
F
O
Fig 14
K
R
u
z
x
t
S
E
N


Fig 16
G
D
A
F
E
I
K
H
L
M
B
C

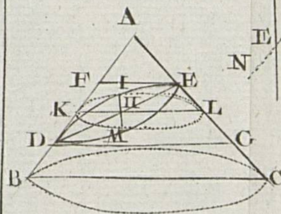
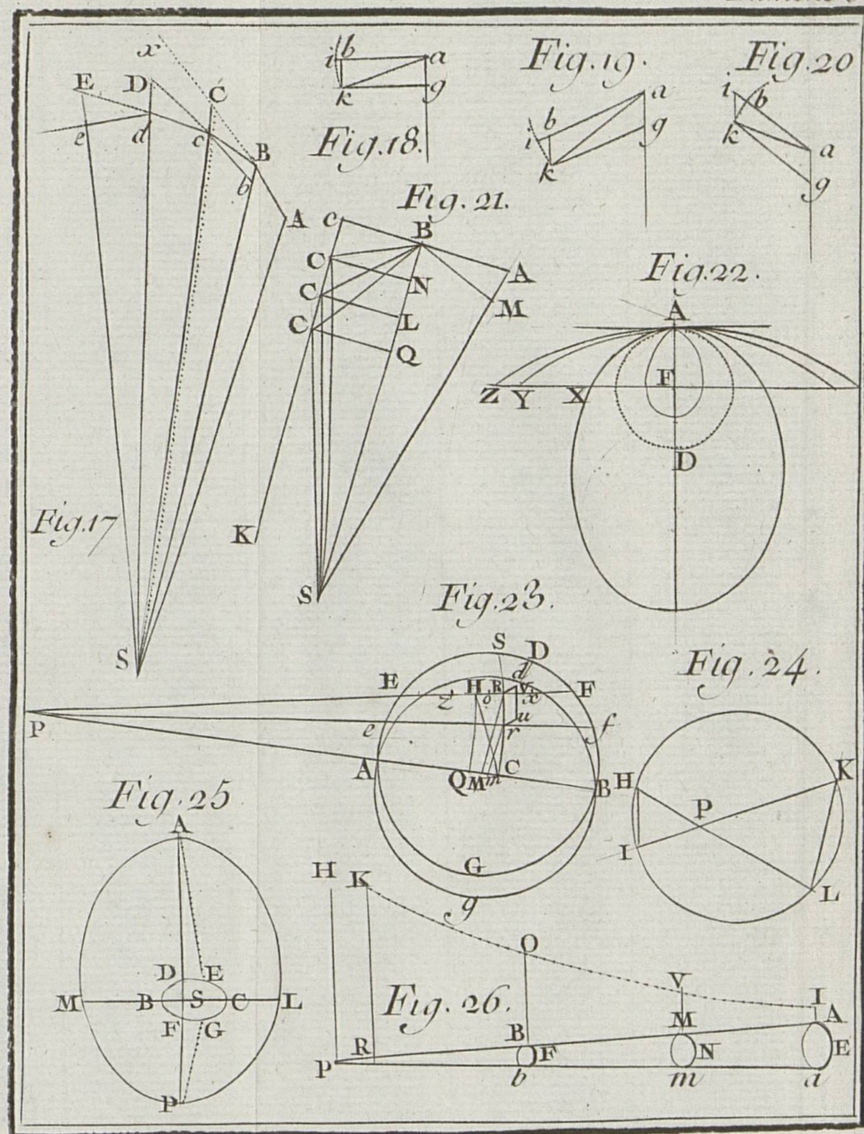
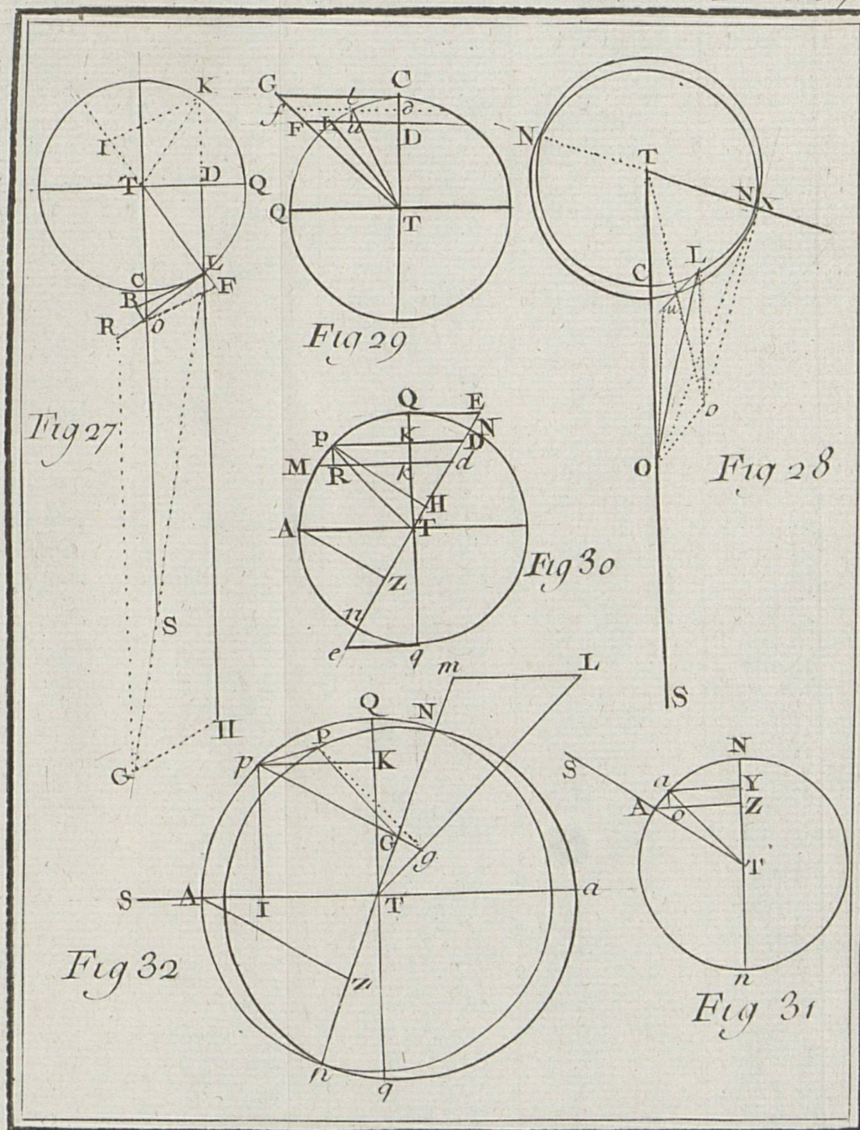
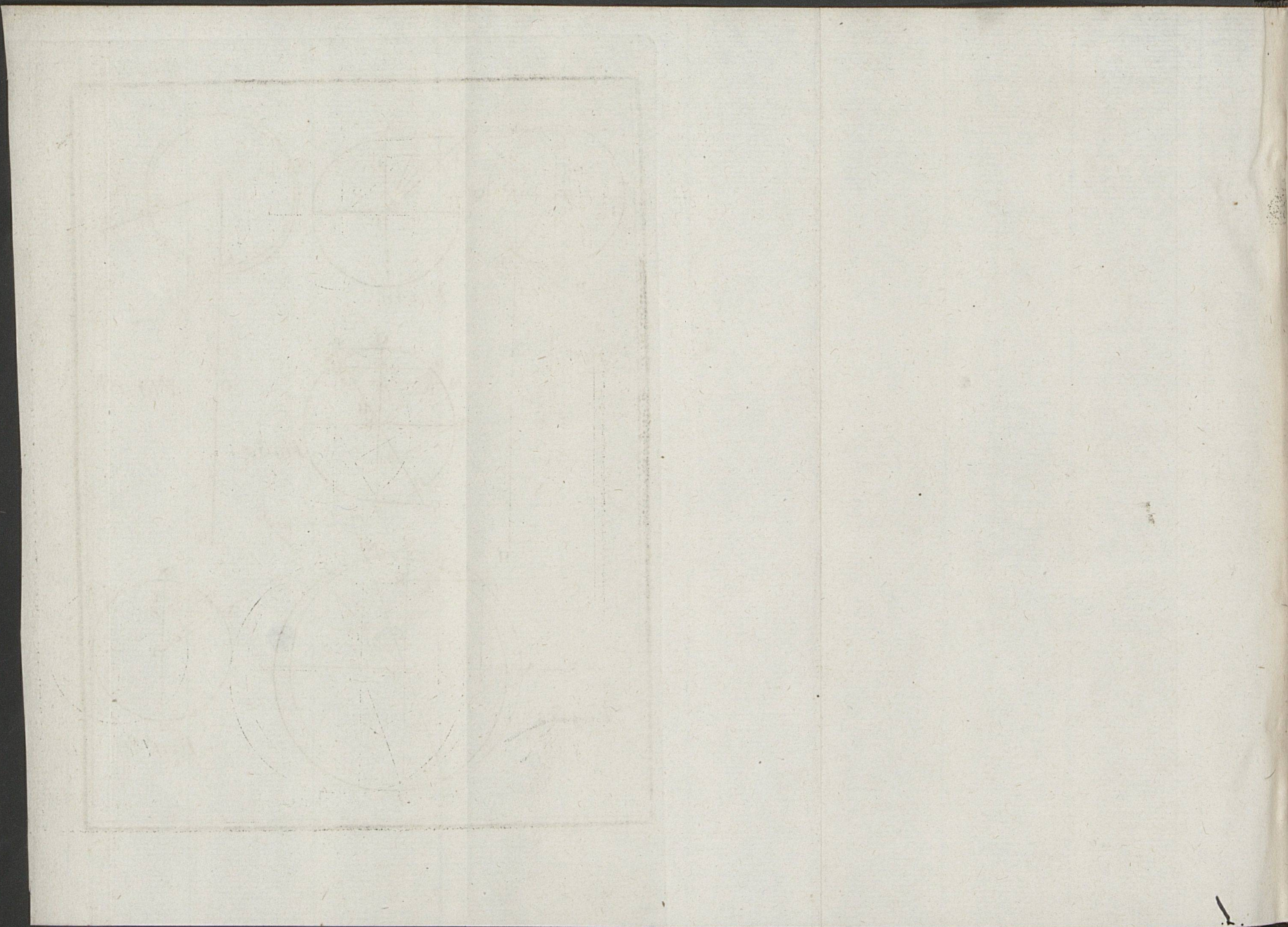

A
F
I
E
K
H
L
D
M
G
B
C

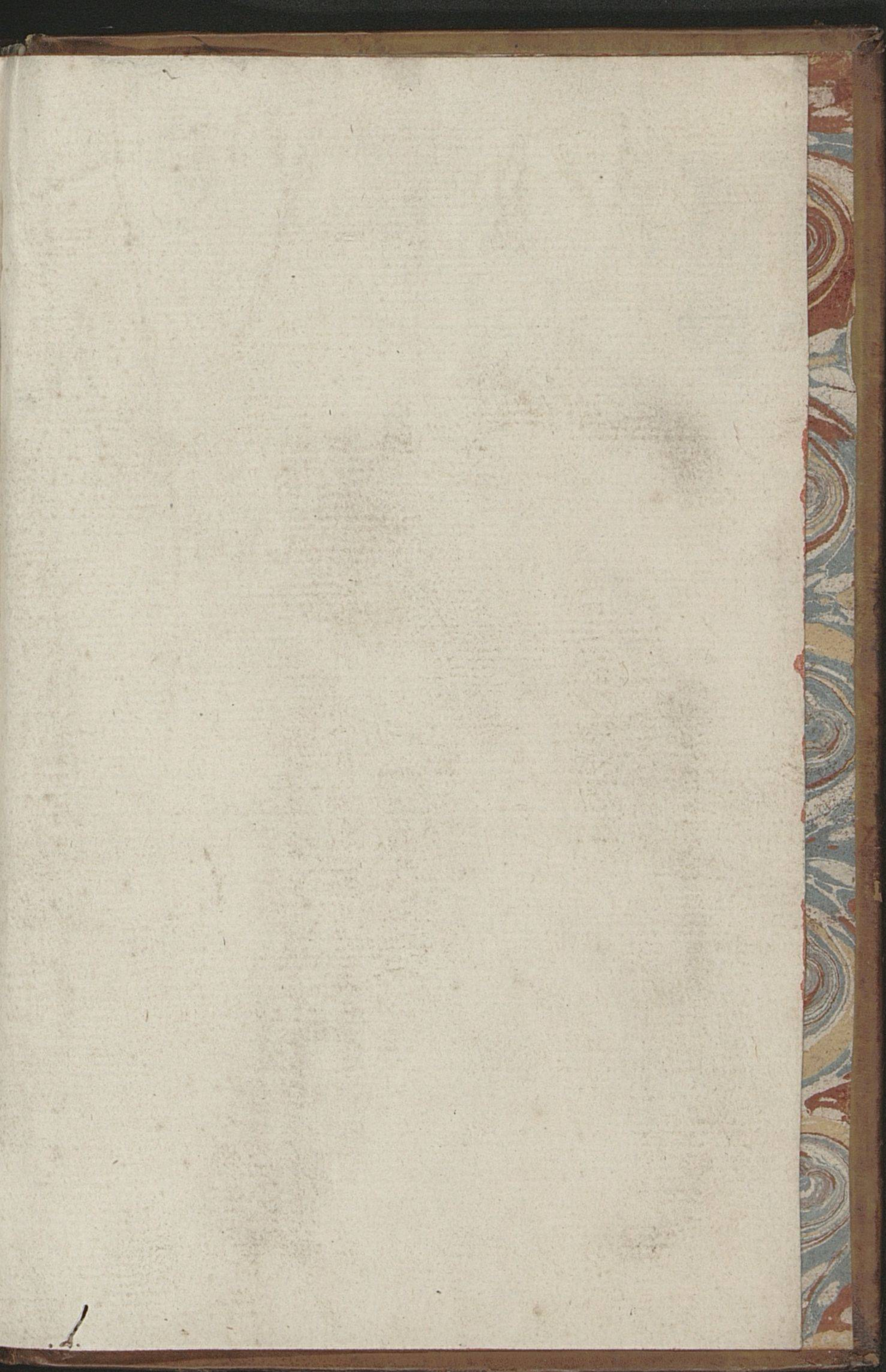
Fig 15

Planche 6


Fig.17
Fig.18
Fig.19
Fig.20
Fig.21
Fig.22
Fig.23
Fig.24
Fig.25
Fig.26

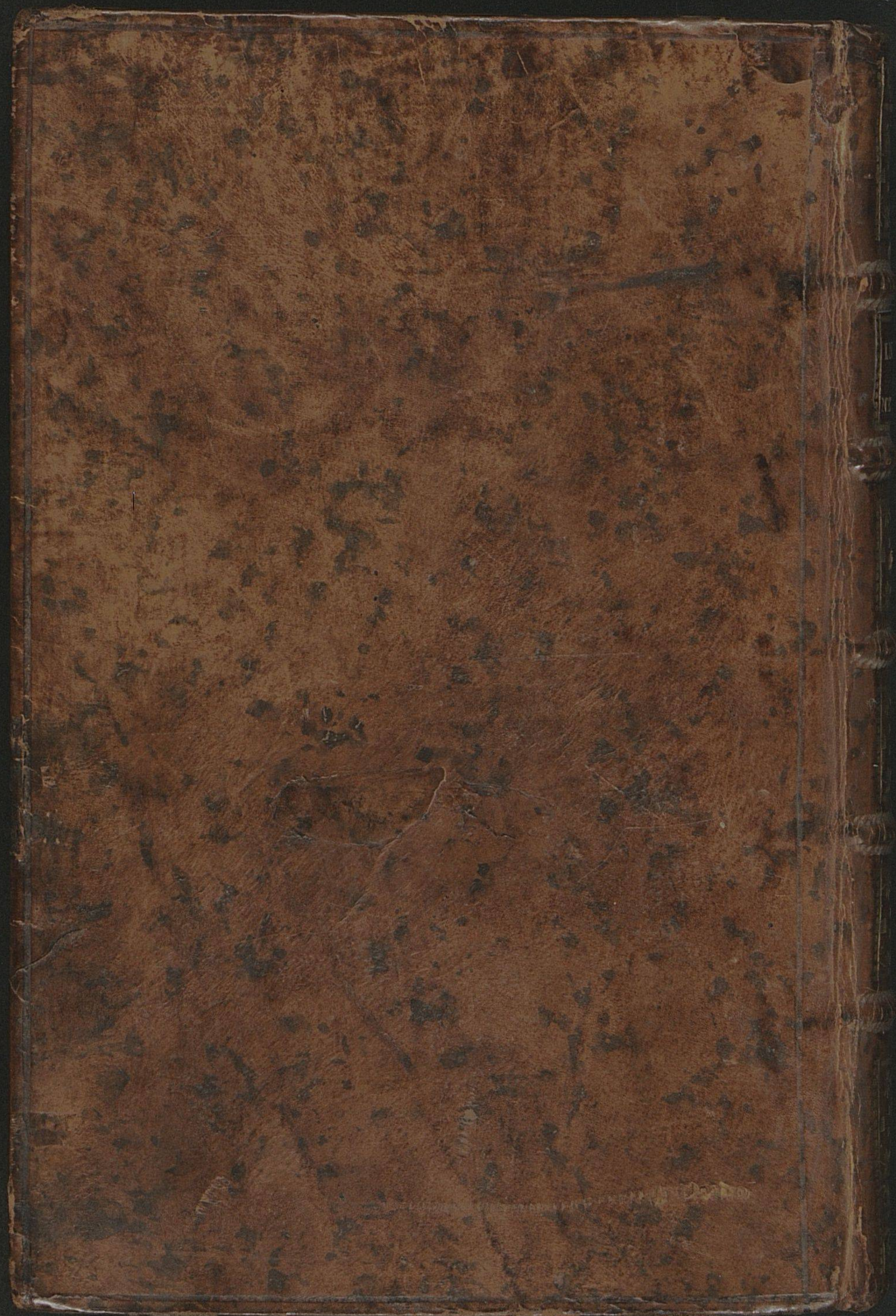

Fig 27
Fig 28
Fig 29
Fig 30
Fig 31
Fig 32













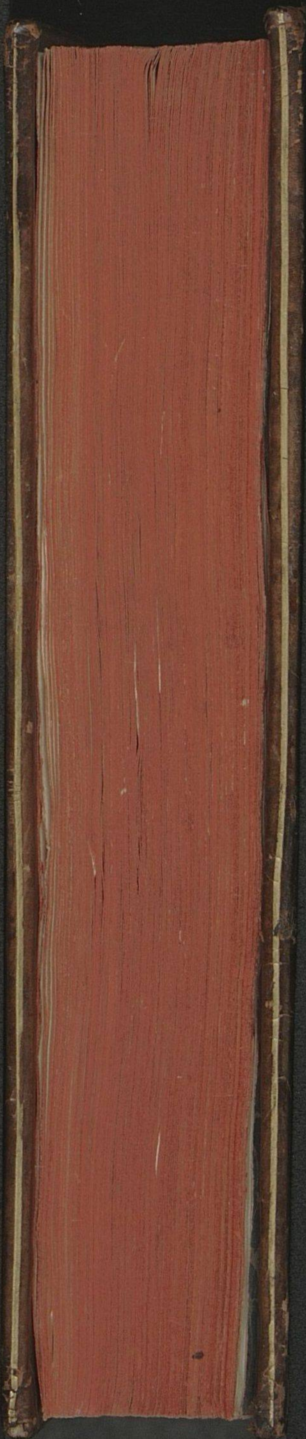
INSTITU
NEWTONIE











inches 4 3 2 1 0 — 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 centimeters

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 (A)	12	13	14	15
L*	39.12	65.43	49.87	44.26	55.56	70.82	63.51	39.92	52.24	97.06	92.02	87.34	82.14	72.06	62.15
a*	13.24	18.11	-4.34	-13.80	9.82	-33.43	34.26	11.81	48.55	-0.40	-0.60	-0.75	-1.06	-1.19	-1.07
b*	15.07	18.72	-22.29	22.85	-24.49	-0.35	59.60	-46.07	18.51	1.13	0.23	0.21	0.43	0.28	0.19
Density ⟶										0.04	0.09	0.15	0.22	0.36	0.51

	16 (M)	17	18 (B)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
	49.25	38.62	28.86	16.19	8.29	3.44	31.41	72.46	72.95	29.37	54.91	43.96	82.74	52.79	50.87	L*
	-0.16	-0.18	0.54	-0.05	-0.81	-0.23	20.98	-24.45	16.83	13.06	-38.91	52.00	3.45	50.88	-27.17	a*
	0.01	-0.04	0.60	0.73	0.19	0.49	-19.43	55.93	68.80	-49.49	30.77	30.01	81.29	-12.72	-29.46	b*
Density	0.75	0.98	1.24	1.67	2.04	2.42										

D50 Illuminant, 2 degree observer

Golden Thread

Colors by Munsell Color Services Lab

Don Williams